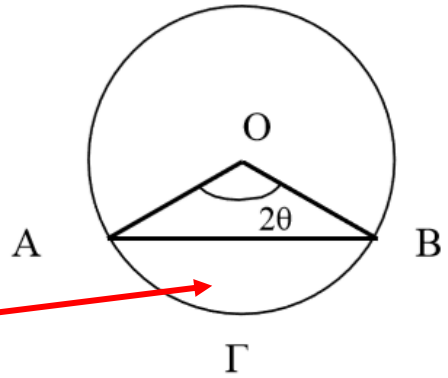
4. Με τη μέθοδο Newton - Raphson και με ακρίβεια 10^{-3} να υπολογιστεί η γωνία **θ**, ώστε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΒΓΑ να είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΟΒ.

(Απάντηση θ = 1.139 rad)



τομέας τρίγωνο

$$\boxed{\frac{2\theta}{2\pi}\pi r^2} - \boxed{\frac{r^2\sin(2\theta)}{2}} = 2\frac{r^2\sin(2\theta)}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\theta} - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathbf{sin(2\theta)} = \mathbf{0} = \mathrm{f}(\theta)$$

$$f'(\theta) = 1 - 3\cos(2\theta)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

i	x(i)			
0	1	2	10	3
1	1.1619	0.9411	48.4871	4.8182
2	1.1398	1.1947	35.7019	3.5131
3	1.1394	1.1415	24.0746	5.5787
4	1.1394	1.1394	14.1551	-8.0840
5	1.1394	1.1394	10.6012	-5.7115
6	1.1394	1.1394	7.5386	-34.7802
7	1.1394	1.1394	5.5946	-54.7710
8	1.1394	1.1394	-11.1201	-40.3145
9	1.1394	1.1394	-8.1796	-125.8385
10	1.1394	1.1394	-5.4955	-194.7535
11	1.1394	1.1394	1.4049	-292.3549
12	1.1394	1.1394	1.1661	-455.0883
13	1.1394	1.1394	1.1399	-962.4107
14	1.1394	1.1394	1.1394	-604.2628
15	1.1394	1.1394	1.1394	-376.9006

i	xi
0	1
1	=B2-(B2-1.5*SIN(2*B2))/(1-3*COS((2*B2)))
2	=B3-(B3-1.5*SIN(2*B3))/(1-3*COS((2*B3)))
3	=B4-(B4-1.5*SIN(2*B4))/(1-3*COS((2*B4)))
4	=B5-(B5-1.5*SIN(2*B5))/(1-3*COS((2*B5)))
5	=B6-(B6-1.5*SIN(2*B6))/(1-3*COS((2*B6)))

$\sin x = e^{-x}$ Μέθοδος διχοτόμησης, στο διάστημα [0,1] ακρίβεια 10^{-4}

xi	f(xi)	
0	-1	
1	0.473592	
0.5	-0.12711	1
0.75	0.209272	2
0.625	0.049836	3
0.5625	-0.03648	4
0.59375	0.007221	5
0.578125	-0.01449	6
0.585938	-0.0036	7
0.589844	0.001817	8
0.587891	-0.00089	9
0.588867	0.000464	10
0.588379	-0.00021	11
0.588623	0.000125	12
0.588501	-4.4E-05	13
0.588562	4.06E-05	14
0.588531	-1.7E-06	

$$i \geq \log(l/\varepsilon) / \log 2$$

$$n \geq \frac{\log \frac{1}{0.0001}}{\log 2} = 13.28$$

Να λυθεί η εξίσωση $y = f(x) = 6\cos\left(x - 1 - \frac{a}{100}\right) - 3 = 0$ με την μέθοδο της διχοτόμησης, στο διάστημα [2, 3.2]. Η λύση να βρεθεί με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων. Αρχικά να βρεθεί ο αριθμός των προσεγγίσεων που απαιτούνται για την ακρίβεια αυτή. Οι πράξεις να γίνονται με χρήση 6 δεκαδικών ψηφίων.

α=0

xi	f(xi)	
2	0.241814	
3.2	-6.53101	
2.6	-3.1752	1
2.3	-1.39501	2
2.15	-0.54908	3
2.075	-0.14561	4
2.0375	0.050248	5
2.05625	-0.04716	6
2.046875	0.001676	7
2.051563	-0.02271	8
2.049219	-0.01051	9
2.048047	-0.00441	10
2.047461	-0.00137	11
2.047168	0.000154	12

$$i \geq \log(1/\varepsilon) / \log 2$$

$$n \geq \frac{\log \frac{1.2}{0.001}}{\log 2} = 10.23$$

Κάθε φορά, ο μέσος όρος της προηγούμενης τιμής του xi, με την τελευταία από τις προηγούμενες που είχε το αντίθετο πρόσημο

Δίνονται τα σημεία με συντεταγμένες (x,y): (-2 , 11), (1 , -16), (2, -25), (5, 368) και (7 , 1820)
Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής Newton.

1	-2.000	11.00
-1	1.000	-16.0000
-4	2.000	-25.00
-5	5.000	368.00
-7	7.000	1820.00

x	f				
-2	11				
		-9			
1	-16		0		
		-9		5	
2	-25		35		1
		131		14	
5	368		119		
		726			
7	1820				

$$f(x) = 11 + (-9)\big(x - (-2)\big) + 0(x+2)(x-1) + 5(x+2)(x-1)(x-2) + 1(x+2)(x-1)(x-2)(x-5)$$

$$f(x) = 1x^4 - 1x^3 - 4x^2 - 5x - 7$$

Πολυώνυμο Newton

x	$f(x)$
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

Table 3.9

x	$f(x)$	First divided differences	Second divided differences	Third divided differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]=\frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5]=\frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},\ldots,x_i]$	$f[x_{i-4},\ldots,x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			−0.4837057			
1	1.3	0.6200860		−0.1087339		
			−0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		−0.0494433		0.0018251
			−0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			−0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

$$
\begin{aligned}
P_4(x) = {} & 0.7651977 - 0.4837057(x-1.0) - 0.1087339(x-1.0)(x-1.3) \\
& + 0.0658784(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6) \\
& + 0.0018251(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9).
\end{aligned}
$$

Να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος: $I = \int_{a-6}^{a+6} \left(5 + e^{-\frac{x-100}{25}}\right) dx$, με την αριθμητική μέθοδο Simpson του (1/3) με μήκος υποδιαστήματος h=2, δηλαδή αριθμό υποδιαστημάτων N=6. Στις ενδιάμεσες πράξεις να χρησιμοποιούνται 5 δεκαδικά ψηφία.

			a	a+2	a+4
=(2/3)*(H6+N6+4*(I6+K6+M6)+2*(J6+L6))			=EXP((100-E6)/25)+5	=EXP((100-E6-2)/25)+5	=EXP((100-E6-4)/25)+5

	ΘΕΜΑ 1ο	ΘΕΜΑ 2ο							
	x	Τελικό I	Ενδιάμεσες τιμές						
ιο	BISECTION	SIMPSON							
a-6			a	a+2	a+4	a+6	a+8	a+10	a+12
-6	**2.047**	**721.486**	74.4079	69.0715	64.1455	59.5982	55.4004	51.5255	47.9484
14	**2.247**	**357.225**	36.1870	33.7892	31.5758	29.5325	27.6464	25.9052	24.2980
34	**2.447**	**193.552**	19.0132	17.9358	16.9413	16.0232	15.1757	14.3933	13.6711
54	**2.647**	**120.009**	11.2965	10.8124	10.3656	9.9530	9.5722	9.2207	8.8962
74	**2.847**	**86.964**	7.8292	7.6117	7.4109	7.2255	7.0544	6.8965	6.7507
93	**3.037**	**72.610**	6.3231	6.2214	6.1275	6.0408	5.9608	5.8869	5.8187
90	**3.007**	**74.218**	6.4918	6.3771	6.2712	6.1735	6.0833	6.0000	5.9231

15. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^2 x\, e^x dx$

με τη μέθοδο Simpson και ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων, για N = 6 υποδιαστήματα και να εκτιμηθεί το σφάλμα. (Απάντηση I = 8.39134)

	x	f(x)		
	0	0	1	0
2/6	0.333333	0.465194	4	1.860775
4/6	0.666667	1.298431	2	2.596863
6/6	1	2.7181	4	10.8724
8/6	1.333333	5.057773	2	10.11555
10/6	1.666667	8.823166	4	35.29267
	2	14.77614	1	14.77614
				75.51438
			I=	8.390487

$$f'(x) = e^x(x+1)$$
$$f''(x) = e^x(x+2)$$
$$f'''(x) = e^x(x+3)$$
$$f''''(x) = e^x(x+4)$$

$$E_N^S = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta), \alpha < \eta < b$$

$$E_N^S = \frac{2}{180}(^2/_6)^4 e^x(x+4) = 0.000137174\, e^x(x+4)$$

0.00055

0.00608

19. Με τη μέθοδο Runge - Kutta 4ης τάξης να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - y$$

με οριακή συνθήκη y(1) = 1 στο διάστημα [1, 2] και με h = 0.2.

$$y' = \frac{y}{x} - y^2$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = h\left({}^{y}/_{x} - y^2\right)$$

$$K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) = h\left(\frac{y + \frac{K_1}{2}}{x + \frac{h}{2}} - \left(y + \frac{K_1}{2}\right)^2\right)$$

$$K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) = h\left(\frac{y + \frac{K_2}{2}}{x + \frac{h}{2}} - \left(y + \frac{K_2}{2}\right)^2\right)$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) = h\left(\frac{y + K_3}{x + h} - (y + K_3)^2\right)$$

n	x	y	K1	K2	K3	K4	y(n+1)
0	1	1	0	-0.018181818	-0.016214876	-0.02960245	0.983601
1	1.2	0.983601	-0.0296	-0.038673298	-0.037612715	-0.04383751	0.945939
2	1.4	0.945939	-0.0438	-0.047561346	-0.047120753	-0.04922257	0.898870
3	1.6	0.898870	-0.0492	-0.050010329	-0.049920371	-0.04981541	0.849052
4	1.8	0.849052	-0.0498	-0.049088038	-0.049172283	-0.04797346	0.799996
5	2	0.799996	-0.048	-0.046529702	-0.046687894	-0.0450121	0.753422
6	2.2	0.753422	-0.045	-0.043287213	-0.043466968	-0.04164426	0.710057
7	2.4	0.710057	-0.0417	-0.039868142	-0.040044094	-0.038244	0.670101
8	2.6	0.670101	-0.0383	-0.036532571	-0.036693729	-0.03499766	0.633483
9	2.8	0.633483	-0.035	-0.033404403	-0.033547088	-0.03198888	0.599999
10	3	0.599999					

13. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{2}^{3} x \ln x \, dx$

με τον τραπεζοειδή κανόνα και ακρίβεια 4 δεκαδικών για h = 0.1. Στη συνέχεια να βρεθεί το πραγματικό σφάλμα και να συγκριθεί με το μέγιστο.

(<u>Απάντηση</u> I = 2.3078)