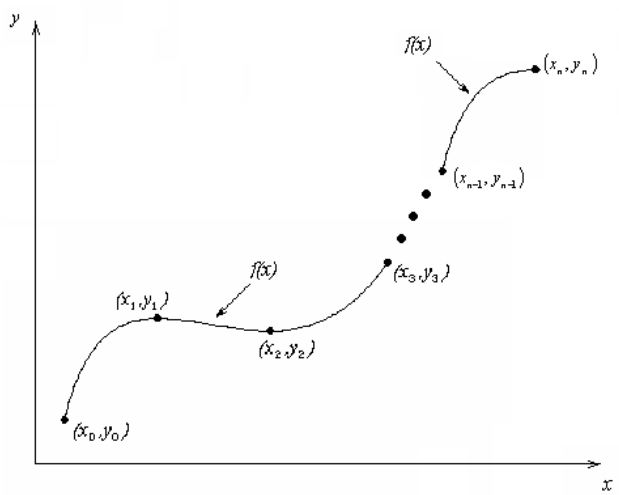
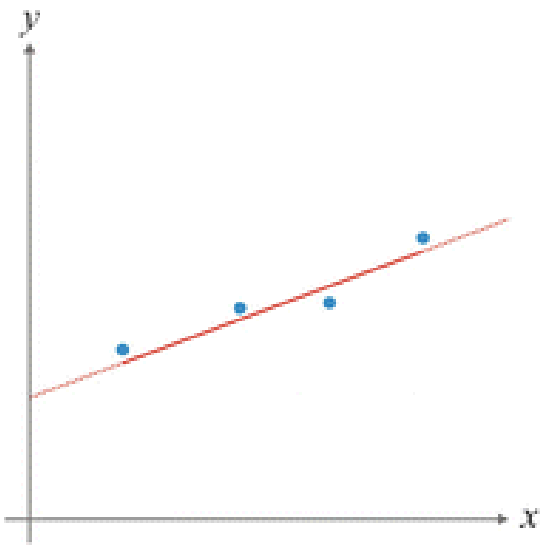
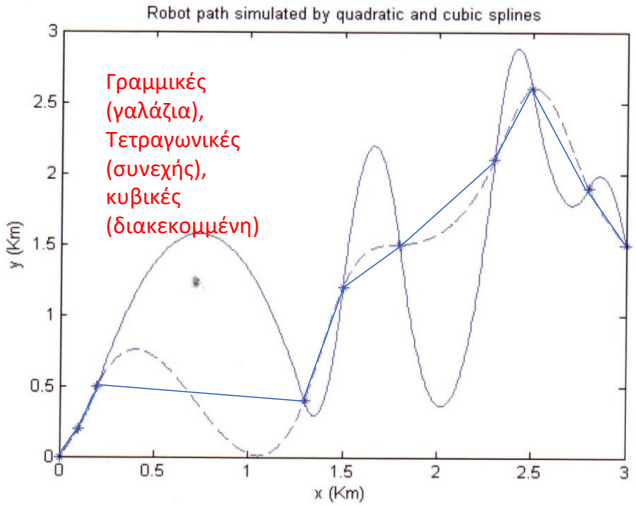
Παρεμβολή – Splines - Παλινδρόμηση





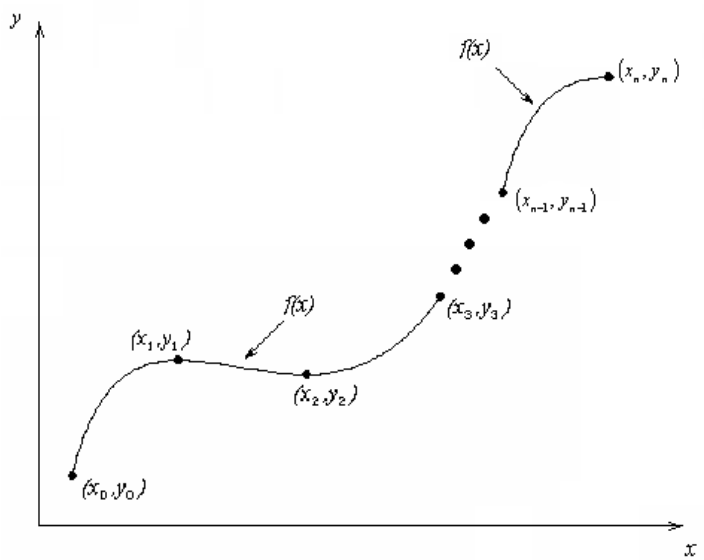


Παρεμβολή – Splines - Παλινδρόμηση

- Πολυώνυμο παρεμβολής (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Πολυώνυμο Lagrange (υπολογισμός τιμής)
- Επαναλαμβανόμενη γραμμική παρεμβολή (υπολογισμός τιμής)
- Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Splines
- Γραμμική παλινδρόμηση

Απλό πρόβλημα παρεμβολής:

Η ανάγκη: από n+1 σημεία (x_0,y_0), (x_1,y_1), …… (x_n,y_n), να βρεθούν τιμές του 'y' που να αντιστοιχούν σε τιμές του 'x' στις οποίες δεν δίνονται. Αναζητείται το πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού n:



$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

τέτοιο ώστε να «διέρχεται» από όλα τα σημεία, Πρέπει:

$$f_0 = a_0 + a_1.x_0 + a_2.x_0^2 + \ldots + a_n.x_0^n$$

$$f_1 = a_0 + a_1.x_1 + a_2.x_1^2 + \ldots + a_n.x_1^n$$

$$\ldots\ldots$$

Σύστημα (n+1) X (n+1)

$$\ldots\ldots$$

$$f_n = a_0 + a_1.x_n + a_2.x_n^2 + \ldots + a_n.x_n^n.$$

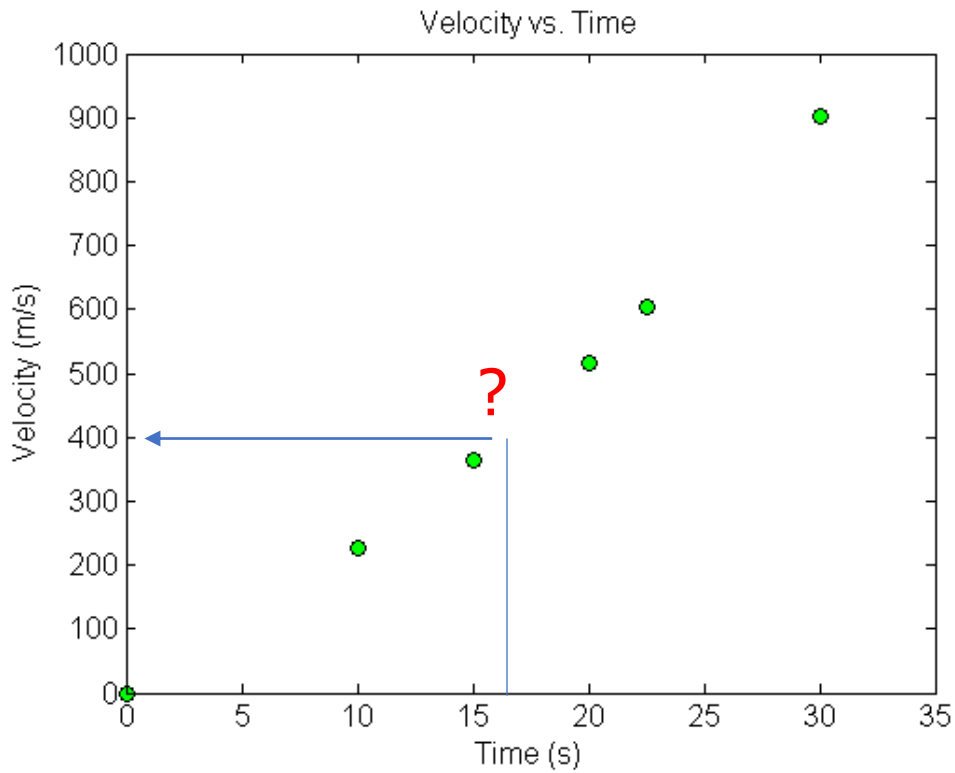
Αποδεικνύεται ότι για να υπάρχει και να είναι μοναδικό, πρέπει και αρκεί η ορίζουσα των αγνώστων να είναι διάφορη του 0.

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

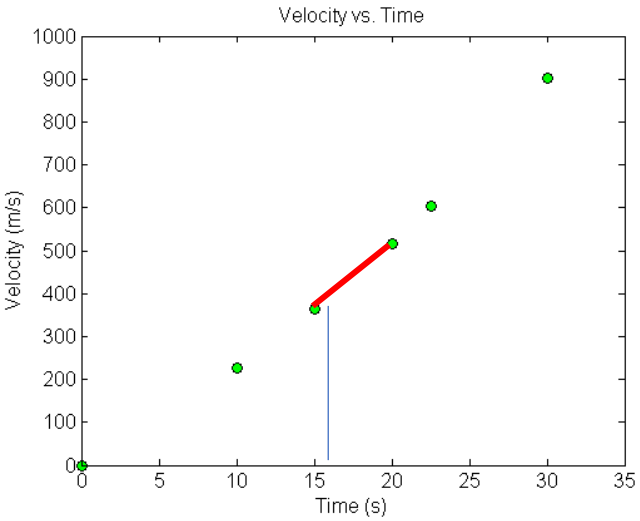
παράδειγμα γραμμικής παρεμβολής (n=1)

Η ταχύτητα πυραύλου δίνεται ως προς τον χρόνο στον πίνακα. Να βρεθεί η ταχύτητα σε χρόνο t=16 sec με την απλή μέθοδο γραμμικής παρεμβολής.

$t, (\mathrm{s})$	$v(t), (\mathrm{m/s})$
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Δεδομένα ταχύτητας / χρόνου



Γραμμική παρεμβολή

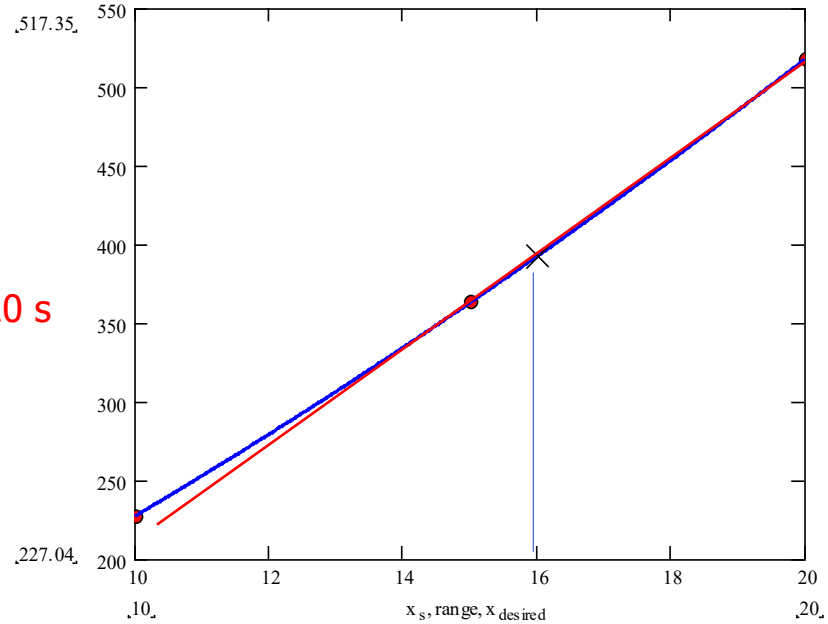
Επιλέγονται τα δύο «γειτονικά» σημεία t = 15 και 20 s

$$v(t) = a_0 + a_1 t \qquad v(15) = a_0 + a_1(15) = 362.78 \qquad a_0 = -100.93$$

$$v(20) = a_0 + a_1(20) = 517.35 \qquad a_1 = 30.914$$

$$v(t) = -100.93 + 30.914t, \ 15 \le t \le 20.$$

$$v(16) = -100.93 + 30.914(16) = 393.7 \text{ m/s}$$



Τετραγωνική παρεμβολή

$$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

Επιλέγονται τα τρία «γειτονικά» σημεία t = 10, 15 και 20 s

$$v(10) = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 = 227.04$$

$$v(15) = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 = 362.78$$

$$v(20) = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 = 517.35$$

$$a_0 = 12.05 \qquad a_1 = 17.733 \qquad a_2 = 0.3766$$

$$v(t) = 12.05 + 17.733t + 0.3766t^2, \ 10 \le t \le 20$$
$$= 392.19 \text{ m/s}$$

$$|\in_a| = \left| \frac{392.19 - 393.70}{392.19} \right| \times 100$$
$$= 0.38410\%$$

κυβική παρεμβολή (n=3)

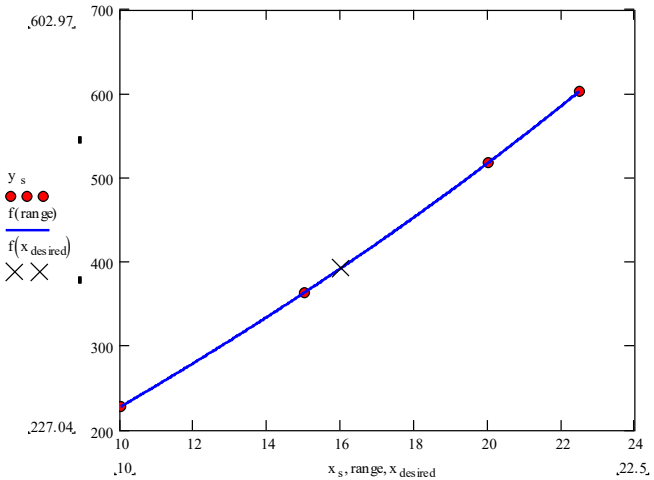
Επιλέγονται τα τέσσερα «γειτονικά» σημεία t = 10, 15, 20 και 22.5 s

$$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$v(10) = 227.04 = a_0 + a_1(10) + a_2(10)^2 + a_3(10)^3$$

$$v(15) = 362.78 = a_0 + a_1(15) + a_2(15)^2 + a_3(15)^3$$

$$v(20) = 517.35 = a_0 + a_1(20) + a_2(20)^2 + a_3(20)^3$$



$$v(22.5) = 602.97 = a_0 + a_1(22.5) + a_2(22.5)^2 + a_3(22.5)^3$$

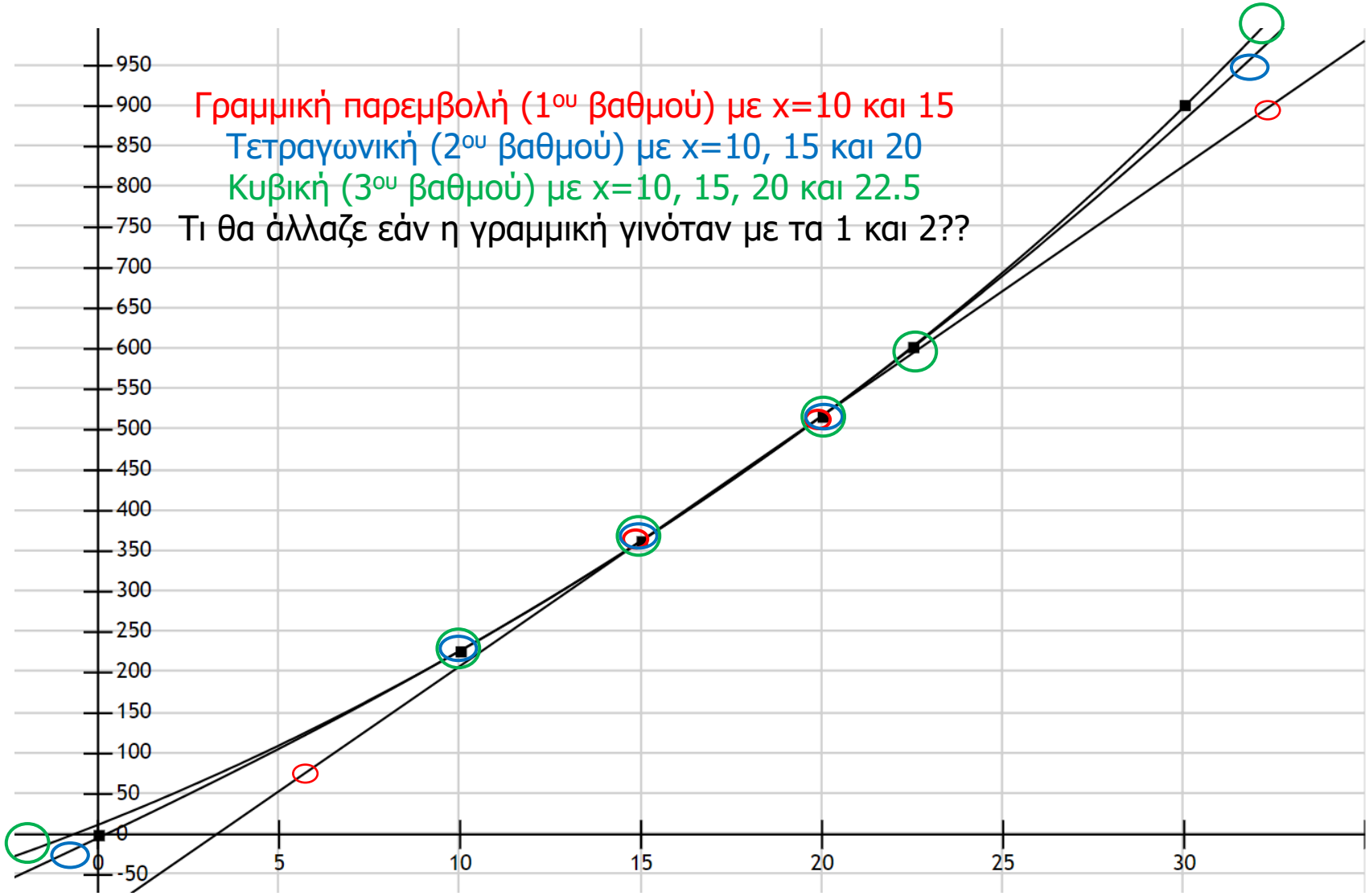
$$a_0 = -4.2540 \qquad a_1 = 21.266 \qquad a_2 = 0.13204 \qquad a_3 = 0.0054347$$

$$v(t) = -4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3, \quad 10 \le t \le 22.5$$

$$v(16) = -4.2540 + 21.266(16) + 0.13204(16)^2 + 0.0054347(16)^3$$
$$= 392.06 \text{ m/s}$$

Το σχετικό ποσοστιαίο προσεγγιστικό σφάλμα μεταξύ δεύτερου και τρίτου βαθμού είναι:

$$|\in_a| = \left|\frac{392.06 - 392.19}{392.06}\right| \times 100$$
$$= 0.033269\%$$



βαθμός	1	2	3
	393.7	392.19	392.06
Σχετικό προσεγγιστικό σφάλμα	----------	0.38410 %	0.033269 %

Απόσταση από την ταχύτητα:

Ποια ήταν η απόσταση που διανύθηκε μεταξύ t=11s to t=16s ?

$$v(t) = -4.3810 + 21.289t + 0.13064t^2 + 0.0054606t^3, \quad 10 \le t \le 22.5$$

$$s(16) - s(11) = \int_{11}^{16} v(t)dt$$

$$= \int_{11}^{16} \left(-4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3\right)dt$$

$$= \left[-4.2540t + 21.266\frac{t^2}{2} + 0.13204\frac{t^3}{3} + 0.0054347\frac{t^4}{4}\right]_{11}^{16}$$

$$= 1605\,\mathrm{m}$$

Επιτάχυνση από την ταχύτητα

Να βρείτε την επιτάχυνση τη στιγμή t=16s

$$v(t) = -4.2540 + 21.266t + 0.13204^2 + 0.0054347t^3, 10 \le t \le 22.5$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(-4.2540 + 21.266t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3\right)$$

$$= 21.289 + 0.26130t + 0.016382t^2, \quad 10 \le t \le 22.5$$

$$a(16) = 21.266 + 0.26408(16) + 0.016304(16)^2$$

$$= 29.665 \text{ m/s}^2$$

- Πολυώνυμο παρεμβολής (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Πολυώνυμο Lagrange (υπολογισμός τιμής)
- Επαναλαμβανόμενη γραμμική παρεμβολή (υπολογισμός τιμής)
- Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Γραμμική παλινδρόμηση

Πολυώνυμο Παρεμβολής Lagrange

Το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το μοναδικό πολυώνυμο n-βαθμού, που διέρχεται από n σημεία. Για τον προσδιορισμό του με τη μέθοδο Lagrange, διαμορφώνονται τα πολυώνυμα L, τα οποία είναι n+1, και στη συνέχεια το πολυώνυμο παρεμβολής διαμορφώνεται σαν γραμμικός συνδυασμός των τιμών των x των σημείων, με τα αντίστοιχα L.

Υπολογίζονται οι συντελεστές L(x) από τα αθροίσματα γινομένων διαφορών των τιμών των x

Κάθε L είναι γινόμενο n όρων. Οι όροι αυτοί είναι λόγοι διαφορών. Οι διαφορές είναι κάθε δυνατού συνδυασμού, εκτός από αυτόν ίδιου δείκτη.

x είναι η τιμή για την οποία εκτιμάται το p(x)
Ενώ x_i οι τιμές στις οποίες έχω την $p(x_i)$

Έστω $p(x) = a_0.L_0(x) + a_1.L_1(x) + \ldots + a_n.L_n(x) \quad = \sum_{k=0}^{n} a_k.L_k(x)$.

όπου $L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$, $k = 0, 1, \ldots, n.$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0).(x - x_1). \quad . \quad .(x - x_{k-1}).(x - x_{k+1}). \quad . \quad .(x - x_n)}{(x_k - x_0).(x_k - x_1). \quad . \quad .(x_k - x_{k-1}).(x_k - x_{k+1}). \quad . \quad .(x_k - x_n)}$$

Υπολογίζεται η τιμή για $x=x_k$, σαν γραμμικός συνδυασμός των L(x) με τα f_i

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k).L_k(x) = f_0.L_0(x) + f_1.L_1(x) + . \quad . \quad . \quad + f_n.L_n(x) \quad .$$

Παράδειγμα: δευτερου βαθμού (τετραγωνική) παρεμβολή με πολυώνυμα Lagrange

Για μία συνάρτηση f(x) δίνονται τα

x_0 f_0 x_1 f_1 x_2 f_2

$f(1) = 1.5708, \quad f(3) = 1.5719, \quad f(5) = 1.5738.$

Γενική παρατήρηση:
Ο αριθμός των πολυωνύμων Lagrange είναι ίσος με τον αριθμό των σημείων, ενώ ο αριθμός των όρων στον αριθμητή και τον παρονομαστή τους είναι μειωμένος κατά 1

x

Να προσεγγιστεί η f(3.5) με τη βοήθεια του πολυωνύμου παρεμβολής Lagrange.

$$L_0(x) = \frac{(3.5-3).(3.5-5)}{(1-3).(1-5)} = -0.09375$$

$$L_1(x) = \frac{(3.5-1).(3.5-5)}{(3-1).(3-5)} = 0.93750$$

$$L_2(x) = \frac{(3.5-1).(3.5-3)}{(5-1).(5-3)} = 0.15625$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$f(x) = L_0 f_0 + L_1 f_1 + L_2 f_2$$

f(3.5) ≈ -0.09375 * 1.5708 + 0.9375 * 1.5719 + 0.15625 * 1.5738

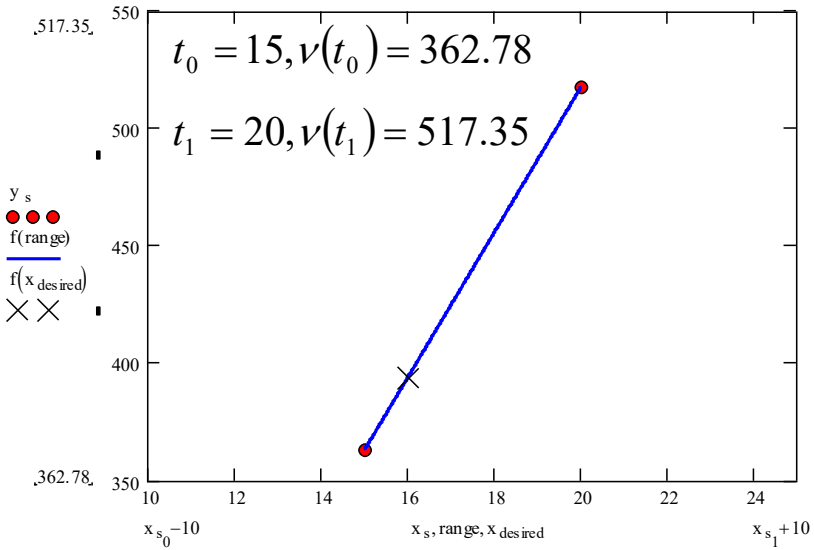
= **1.5723**

Γραμμική παρεμβολή με πολυώνυμα Lagrange

$$v(t) = \sum_{i=0}^{1} L_i(t)v(t_i) = L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1)$$

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{1} \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \frac{t-t_1}{t_0-t_1}$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{1} \frac{t-t_j}{t_1-t_j} = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}$$



$$v(t) = \frac{t-t_1}{t_0-t_1}v(t_0) + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}v(t_1) \boxed{= \frac{t-20}{15-20}(362.78) + \frac{t-15}{20-15}(517.35)}$$

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε τιμή του χρόνου μέσα στο διάστημα 15-20s

$$v(16) = \frac{16-20}{15-20}(362.78) + \frac{16-15}{20-15}(517.35)$$

$$= 0.8(362.78) + 0.2(517.35)$$

$$= 393.7 \text{ m/s.}$$

στην τιμή για t=16s, η τιμή για 15s βαραίνει κατά 4/5, και η τιμή για 20s κατά 1/5. Δηλαδή αντίστροφα από τις αντίστοιχες αποστάσεις

Τετραγωνική (δευτεροβάθμια) παρεμβολή με πολυώνυμα Lagrange

$$t_0 = 10,\ v(t_0) = 227.04$$

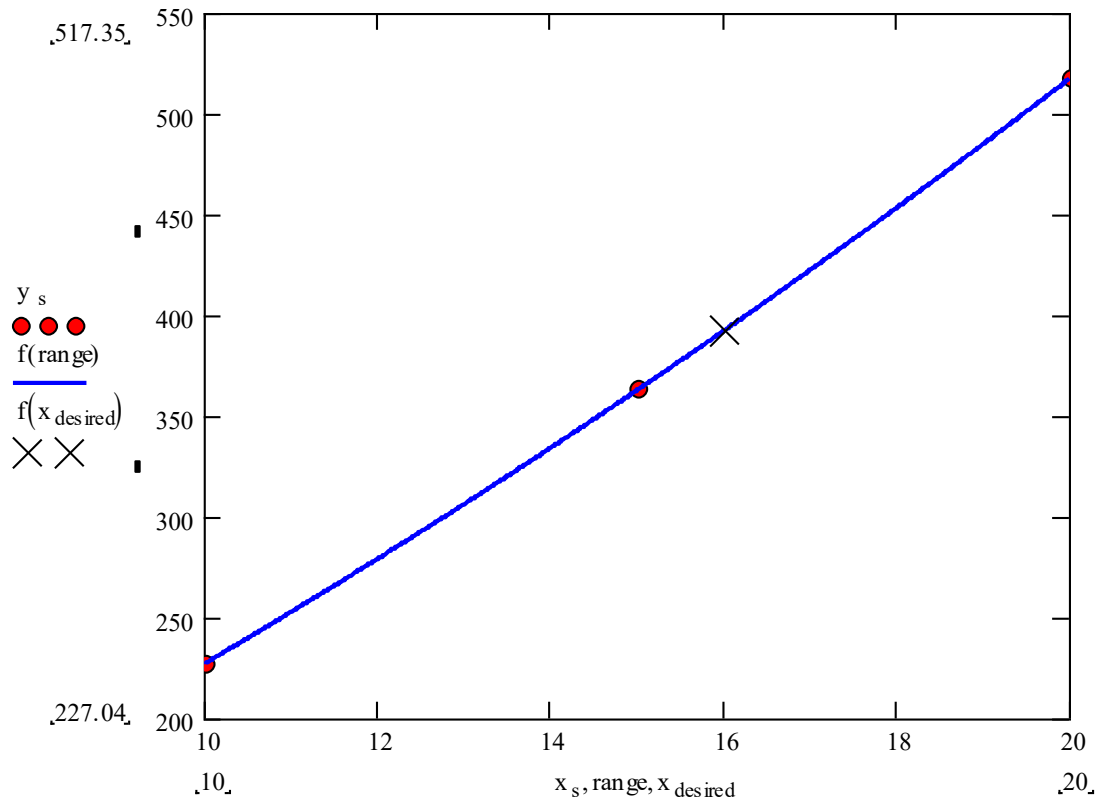
$$t_1 = 15,\ v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20,\ v(t_2) = 517.35$$

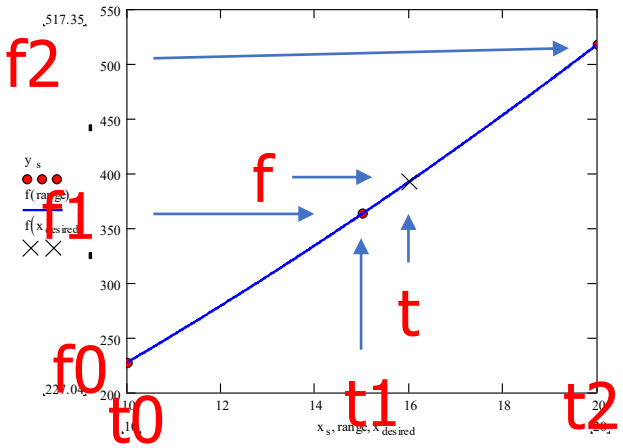
$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{2} \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \left(\frac{t - t_1}{t_0 - t_1}\right)\left(\frac{t - t_2}{t_0 - t_2}\right)$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{2} \frac{t - t_j}{t_1 - t_j} = \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\right)\left(\frac{t - t_2}{t_1 - t_2}\right)$$

$$L_2(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{2} \frac{t - t_j}{t_2 - t_j} = \left(\frac{t - t_0}{t_2 - t_0}\right)\left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\right)$$



Τετραγωνική (δευτεροβάθμια) παρεμβολή με πολυώνυμα Lagrange



$$f(x) = L_0 f_0 + L_1 f_1 + L_2 f_2$$

$$v(t) = \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right)v(t_0) + \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right)v(t_1) + \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)v(t_2)$$

$$v(16) = \left(\frac{16-15}{10-15}\right)\left(\frac{16-20}{10-20}\right)(227.04) + \left(\frac{16-10}{15-10}\right)\left(\frac{16-20}{15-20}\right)(362.78) + \left(\frac{16-10}{20-10}\right)\left(\frac{16-15}{20-15}\right)(517.35)$$

$$= (-0.08)(227.04) + (0.96)(362.78) + (0.12)(527.35)$$

$$= 392.19 \text{ m/s}$$

Κυβική (τριτοβάθμια) παρεμβολή με πολυώνυμα Lagrange

$$t_o = 10,\ v(t_o) = 227.04 \qquad t_1 = 15,\ v(t_1) = 362.78$$

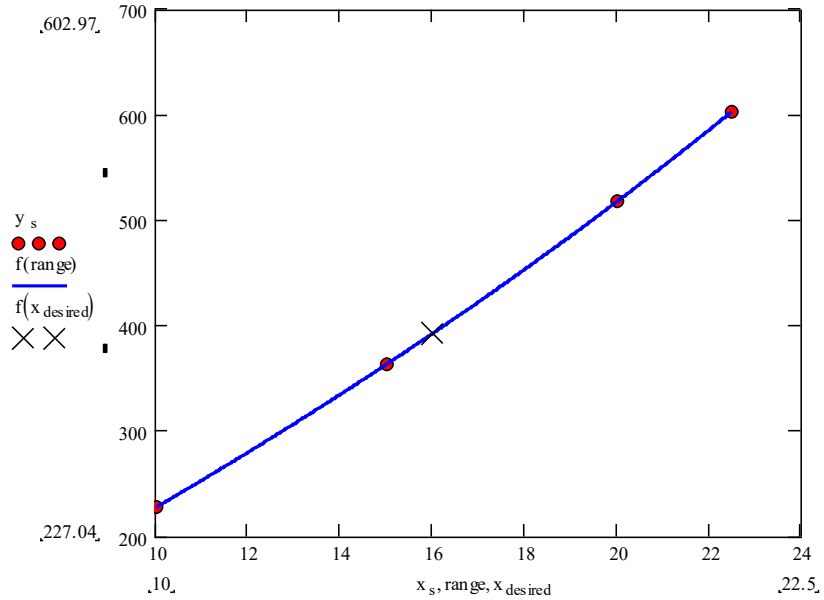
$$t_2 = 20,\ v(t_2) = 517.35 \qquad t_3 = 22.5,\ v(t_3) = 602.97$$

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 0}}^{3} \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_0-t_3}\right);$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{3} \frac{t-t_j}{t_1-t_j} = \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_1-t_3}\right)$$

$$L_2(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{3} \frac{t-t_j}{t_2-t_j} = \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_2-t_3}\right);$$

$$L_3(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 3}}^{3} \frac{t-t_j}{t_3-t_j} = \left(\frac{t-t_0}{t_3-t_0}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_3-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_3-t_2}\right)$$



Κυβική (τριτοβάθμια) παρεμβολή με πολυώνυμα Lagrange

$$v(t)=\left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_0-t_3}\right)v(t_1)+\left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_1-t_3}\right)v(t_2)$$

$$+\left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_2-t_3}\right)v(t_2)+\left(\frac{t-t_1}{t_3-t_1}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_3-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_3-t_2}\right)v(t_3)$$

$$v(16)=\left(\frac{16-15}{10-15}\right)\left(\frac{16-20}{10-20}\right)\left(\frac{16-22.5}{10-22.5}\right)(227.04)+\left(\frac{16-10}{15-10}\right)\left(\frac{16-20}{15-20}\right)\left(\frac{16-22.5}{15-22.5}\right)(362.78)$$

$$+\left(\frac{16-10}{20-10}\right)\left(\frac{16-15}{20-15}\right)\left(\frac{16-22.5}{20-22.5}\right)(517.35)+\left(\frac{16-10}{22.5-10}\right)\left(\frac{16-15}{22.5-15}\right)\left(\frac{16-20}{22.5-20}\right)(602.97)$$

$$=(-0.0416)(227.04)+(0.832)(362.78)+(0.312)(517.35)+(-0.1024)(602.97)$$

$$=392.06\,\text{m/s}$$

$$|\in_a|=\left|\frac{392.06-392.19}{392.06}\right|\times 100$$

$$=0.033269\%$$

- Πολυώνυμο παρεμβολής (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Πολυώνυμο Lagrange (υπολογισμός τιμής)
- Επαναλαμβανόμενη γραμμική παρεμβολή (υπολογισμός τιμής)
- Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Γραμμική παλινδρόμηση

Επαναλαμβανόμενη γραμμική παρεμβολή

Πολυώνυμο 1ου βαθμού που περνά από τα σημεία (x0,f0) και (x1,f1)

$$p_{01}(x) = \frac{(x_1 - x).f_0 - (x_0 - x).f_1}{x_1 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0}$$

Πολυώνυμο 2ου βαθμού που περνά από τα σημεία (x0,f0), (x1,f1) και (xj,fj)

$$p_{01j}(x) = \frac{(x_j - x).p_{01} - (x_1 - x).p_{0j}}{x_j - x_1}$$

Πολυώνυμο k βαθμού που περνά από τα σημεία (x0,f0), (x1,f1) … (xk,fk)

$$p_{0,1,\ .\ .\ .\ ,k-1,k,j} = \frac{(x_j - x).p_{0,1,\ldots,k-1,k} - (x_k - x).p_{0,1,\ldots,k-1,j}}{x_j - x_k}$$

Η σχέση (5.6) υποδεικνύει μία επαναληπτική διαδικασία για την εύρεση του πολυωνύμου παρεμβολής. Η διαδικασία αυτή φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x_j f_j	p_{0j}	p_{01j}	p_{012j}			$x_j - x$
$x_0 p_0$						$x_0 - x$
$x_1 p_1$	p_{01}					$x_1 - x$
$x_2 p_2$	p_{02}	p_{012}				$x_2 - x$
. .	. .	. .				. . .
x_j p_j	p_{0j}	p_{01j}	p_{012j}			$x_j - x$
. .	.	. .	. . .	. .	. . .	. . .
$x_n p_n$	p_{0n}	p_{01n}	p_{012n}	. .	$p_{0,1,2,\ldots,n}$	$x_n - x$

Επαναλαμβανόμενη γραμμική παρεμβολή: τετραγωνική παρεμβολή, μέσω 2+1 γραμμικών

Δίνεται f(1) = 1.5708, f(3) = 1.5719 και f(5) = 1.5738. Να προσεγγιστεί η f(3.5) με τη μέθοδο της επαναλαμβανόμενης γραμμικής παρεμβολής.

1	1.5708
3	1.5719
5	1.5738
3.5	???

Λύση

$$p_{01} = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1.5708 & -2.5 \\ 1.5719 & -0.5 \end{vmatrix}}{3-1} = 1.57217$$

Παρεμβολή από 1 και 3 για 3.5

$$p_{02} = \frac{\begin{vmatrix} 1.5708 & -2.5 \\ 1.5738 & 1.5 \end{vmatrix}}{5-1} = 1.57267$$

Παρεμβολή από 1 και 5 για 3.5

$$p_{012} = \frac{\begin{vmatrix} 1.57217 & -0.5 \\ 1.57267 & 1.5 \end{vmatrix}}{2} = 1.57232$$

Παρεμβολή από τα δύο παραπάνω κεντροβαρικά

x_j	f_j	p_{0j}	p_{01j}	$x_j - x$
1	1.5708			-2.5
3	1.5719	1.57217		-0.5
5	1.5738	1.57267	1.57232	1.5

Επαναλαμβανόμενη γραμμική παρεμβολή: κυβική παρεμβολή, μέσω 3+2+1 γραμμικών

Για τη συνάρτηση y = sin x δίνονται τα ακόλουθα τέσσερα ζεύγη αντιστοίχων τιμών (x_j, y_j).

n	0	1	2	3
y	0.0998	0.1987	0.2955	0.3894
x	0.1	0.2	0.3	0.4

Για y = 0.2800 να εκτιμηθεί η x = arc sin (0.2800).

Λύση

y_j	x_j	x_{0j}	x_{01j}	x_{012j}	y_j - y
0.0998	0.1				-0.1802
0.1987	0.2	0.28220			-0.0813
0.2955	0.3	0.28416	0.28384		0.0155
0.3894	0.4	0.28667	0.28411	0.28379	0.1094

Άσκηση προς επίλυση

8. Δίνονται τα παρακάτω ζεύγη αντιστοίχων τιμών.

x	14	17	31
y	68.7	64	44

Να υπολογιστεί η τιμή y(27) με τη μέθοδο της επαναλαμβανόμενης γραμμικής παρεμβολής.

xj	fj	p0j	p01j	xj-x
14	68.7			-13
17	64	48.33333		-10
31	44	49.81176	49.38936	4
		27		

- Πολυώνυμο παρεμβολής (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Πολυώνυμο Lagrange (υπολογισμός τιμής)
- Επαναλαμβανόμενη γραμμική παρεμβολή (υπολογισμός τιμής)
- Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Splines
- Γραμμική παλινδρόμηση

Προσδιορισμός πολυωνύμου παρεμβολής κατά Newton

Έστω και πάλι $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ με

$$p_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Το πολυώνυμο προσδιορίζεται από:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \ .$$

όπου:

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Για n=2: Δεδομένα: x_0, x_1, x_2, $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)\ (x - x_1)$$

$$= f[x_0] + \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}(x - x_0)\ (x - x_1)$$

Τώρα, ο υπολογισμός των συντελεστών του πολυωνύμου Newton διατάσσεται σε πίνακα :

	x \ k	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
(d_0)	x_0	$f[x_0]$				
			$f[x_0,x_1]$			
(d_1)	x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
			$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
(d_2)	x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$
			$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
(d_3)	x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
			$f[x_3,x_4]$			
(d_4)	x_4	$f[x_4]$				

Μετά τον υπολογισμό των συντελεστών, η τιμή του πολυωνύμου για μία συγκεκριμένη τιμή του x, υπολογίζεται σύμφωνα με το σχήμα διαδοχικού εγκλωβισμού :

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= A_0 + A_1.(x - x_0) + A_2.(x - x_0).(x - x_1) + \ldots + \\
&\quad + A_n.(x - x_0).(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) = \\
&= A_0 + (x - x_0).\{A_1 + (x - x_1).\{A_2 + (x - x_2).(\ldots \\
&\quad + A_{n-2} + (x - x_{n-2}).\{A_{n-1} + A_n .(x - x_{n-1})\}\}\} \ldots \}.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το πολυώνυμο Newton το οποίο διέρχεται από τα σημεία

x	-4	-1	0	2	5
y	1245	33	5	9	1335

Λύση

x	f				
-4	1245				
		-404			
-1	33		94		
		-28		-14	
0	5		10		3
		2		13	
2	9		88		
		442			
5	1335				

(33-1245)/((-1)-(-4))

((-28)-(-404)))/(0-(-4))

(10-94)/((2)-(-4))

(13-(-14))/((5)-(-4))

(2-(-28))/(2-(-1))

(9-5)/(2-0)

$$f(x) = 1245 - 404(x + 4) + 94(x + 4).(x + 1) - 14(x + 4).(x + 1).x +$$

$$+ 3(x + 4).(x + 1).x.(x - 2) = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 14x + 5.$$

9. Να υπολογιστεί το πολυώνυμο παρεμβολής Newton το οποίο διέρχεται από τα σημεία (-1, 0), (0, -5), (1, -4), (3, 16), (6, 721).

(<u>Απάντηση</u> $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5$)

x	f				
-1	0				
		-5			
0	-5		3		
		1		0	
1	-4		3		1
		10		7	
3	16		45		
		235			
6	721				

$$f(x)=0+(-5)(x-(-1))+3(x+1)(x-0)$$

$$+0(x+1)(x-0)(x-1)$$

$$+1(x+1)(x-0)(x-1)(x-3)$$

$$=-5x-5+3x^2+3x+x(x^3-3x^2-x+3)$$

$$=x^4-3x^3+2x^2+x-5$$

- Πολυώνυμο παρεμβολής (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Πολυώνυμο Lagrange (υπολογισμός τιμής)
- Επαναλαμβανόμενη γραμμική παρεμβολή (υπολογισμός τιμής)
- Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Splines
- Γραμμική παλινδρόμηση

Splines 1ου, 2ου και 3ου βαθμού

προσέγγιση συνόλου σημείων [xi, s(xi)] με πολυώνυμα μικρού βαθμού, όπου το καθένα να ισχύει στο περιορισμένο διάστημα $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

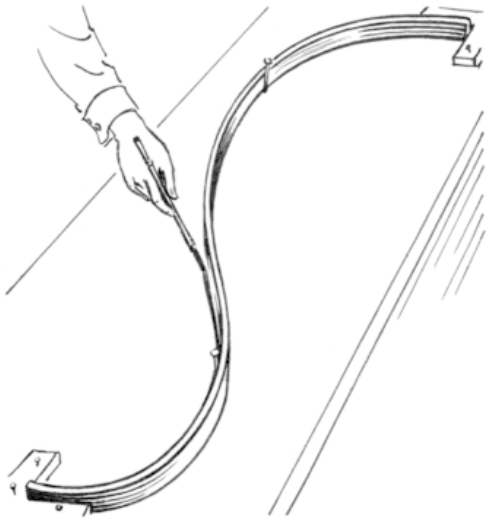
Συνάρτηση γραμμικής παρεμβολής $S_1(x)$, από n γραμμικές splines $s_{1,i}(x)$
Συνάρτηση τετραγωνικής παρεμβολής $S_2(x)$, από n δευτεροβάθμιες splines $s_{2,i}(x)$
Συνάρτηση κυβικής παρεμβολής $S_3(x)$, από n τριτοβάθμιες splines $s_{3,i}(x)$

Εφαρμογές

Στην επιστήμη των υπολογιστών (πχ CAD, computer graphics)

Είναι πολύ χρήσιμες, λόγω:

- απλότητας της δημιουργίας τους,
- ευκολίας και ακρίβειας των υπολογισμών,
- της δυνατότητας της προσέγγισης πολύπλοκων σχημάτων μέσω curve fitting
- Του αλληλεπιδραστικού σχεδιασμού καμπυλών.



Splines 1ου βαθμού

Εφαρμογή στις ισοϋψείς

Οι άγνωστοι συντελεστές σε κάθε συνάρτηση της γραμμικής splines προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$a_i = s(x_{i-1}), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$b_i = \frac{s(x_i) - s(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Συνάρτηση γραμμικής παρεμβολής $S_1(x)$, από n γραμμικές splines $s_{1,i}(x)$:

$$S_1(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x - x_0), & x_0 \le x \le x_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_i + b_i(x - x_{i-1}), & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \vdots & \vdots \\ a_n + b_n(x - x_{n-1}), & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.8: Έστω ότι ο πληθυσμός μιας χώρας μετά από x_i δεκαετίες α ολουθεί τον αρχικά εγγεγραμμένο πληθυσμό (σε εκατομμύρια) όπως φαίνεται στο αρακάτω πίνακα και θέλουμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση $y_i = s(x_i)$ που προ εγγίζει την καμπύλη της μεταβολής του πληθυσμού.

i	x_i	$y_i = s(x_i)$
0	0	5.0
1	1	5.3
2	2	6.7
3	3	7.3
4	4	7.9
5	5	8.3
6	6	8.7
7	7	8.9
8	8	9.3
[illegible]	10	9.6

$$\begin{aligned}
s_{1,1}(x) &= y_0 + \left[\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right](x - x_0) = 5 + \left[\frac{5.3 - 5}{1 - 0}\right](x - 0) = 5 + 0.3x, \\
s_{1,2}(x) &= y_1 + \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right](x - x_1) = 5.3 + \left[\frac{6.7 - 5.3}{2 - 1}\right](x - 1) = 3.9 + 1.4x, \\
s_{1,3}(x) &= y_2 + \left[\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right](x - x_2) = 6.7 + \left[\frac{7.3 - 6.7}{3 - 2}\right](x - 2) = 5.5 + 0.6x, \\
s_{1,4}(x) &= y_3 + \left[\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}\right](x - x_3) = 7.3 + \left[\frac{7.9 - 7.3}{4 - 3}\right](x - 3) = 5.5 + 0.6x, \\
s_{1,5}(x) &= y_4 + \left[\frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4}\right](x - x_4) = 7.9 + \left[\frac{8.3 - 7.9}{5 - 4}\right](x - 4) = 5.7 + 0.4x, \\
s_{1,6}(x) &= y_5 + \left[\frac{y_6 - y_5}{x_6 - x_5}\right](x - x_5) = 8.3 + \left[\frac{8.7 - 8.3}{6 - 5}\right](x - 5) = 5.9 + 0.4x, \\
s_{1,7}(x) &= y_6 + \left[\frac{y_7 - y_6}{x_7 - x_6}\right](x - x_6) = 8.7 + \left[\frac{8.9 - 8.7}{7 - 6}\right](x - 6) = 7.5 + 0.2x, \\
s_{1,8}(x) &= y_7 + \left[\frac{y_8 - y_7}{x_8 - x_7}\right](x - x_7) = 8.9 + \left[\frac{9.3 - 8.9}{8 - 7}\right](x - 7) = 6.1 + 0.4x, \\
s_{1,9}(x) &= y_8 + \left[\frac{y_9 - y_8}{x_9 - x_8}\right](x - x_8) = 9.3 + \left[\frac{9.6 - 9.3}{10 - 8}\right](x - 8) = 8.1 + 0.15x.
\end{aligned}$$

Τελική γραμμική συνάρτηση Splines:

$$S_1(x) = \begin{cases} 5 + 0.3x, & 0 \le x \le 1 \\ 3.9 + 1.4x, & 1 \le x \le 2 \\ 5.5 + 0.6x, & 2 \le x \le 3 \\ 5.5 + 0.6x, & 3 \le x \le 4 \\ 5.7 + 0.4x, & 4 \le x \le 5 \\ 5.9 + 0.4x, & 5 \le x \le 6 \\ 7.5 + 0.2x, & 6 \le x \le 7 \\ 6.1 + 0.4x, & 7 \le x \le 8 \\ 8.1 + 0.15x, & 8 \le x \le 10 \end{cases}$$

Τετραγωνική συνάρτηση Splines (2ου βαθμού):

Προσέγγιση με συναρτήσεις 2ου βαθμού, χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Newton

$$S_2(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x-x_0) + c_1(x-x_0)(x-x_1), & x_0 \le x \le x_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_i + b_i(x-x_{i-1}) + c_i(x-x_{i-1})(x-x_i), & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \vdots & \vdots \\ a_n + b_n(x-x_{n-1}) + c_n(x-x_{n-1})(x-x_n), & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

$$b_i = \frac{s(x_i) - s(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad c_{i+1} = \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i+1}}\right) c_i + \frac{b_i - b_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

Σχεδιασμός διαδρομής robot σε επίπεδο χώρο με διάσπαρτα εμπόδια ώστε να περιοριστεί η πιθανότητα ατυχήματος. Οι συντεταγμένες των σημείων από τα οποία μπορεί να περάσει το robot είναι:

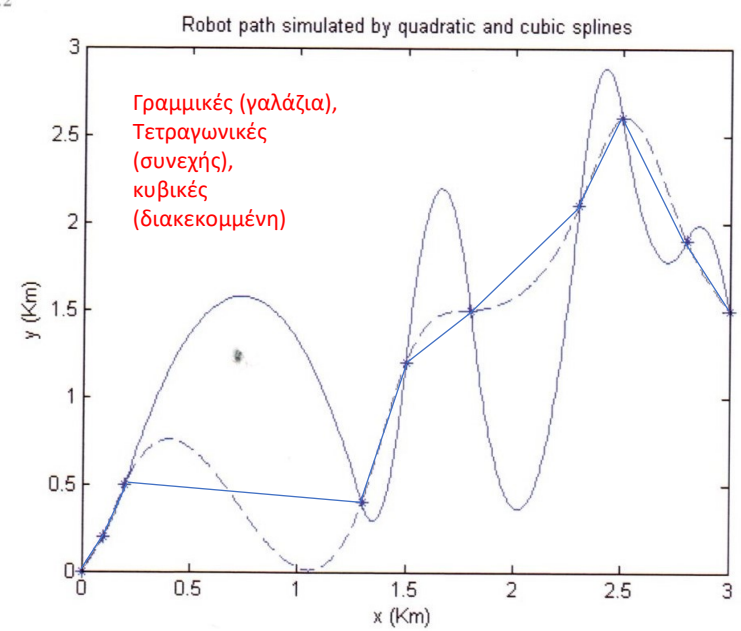
i	$x_i(km)$	$y_i(km)$
0	0.0	0.0
1	0.1	0.2
2	0.2	0.9
3	1.3	0.4
4	1.5	1.2
5	1.8	1.5
6	2.3	2.1
7	2.5	2.6
8	2.8	1.9
9	3.0	1.5

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{s(x_1)-s(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{0.2-0}{0.1-0} = 2 \\
b_2 &= \frac{s(x_2)-s(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{0.9-0.2}{0.2-0.1} = 7 \\
b_3 &= \frac{s(x_3)-s(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{0.4-0.9}{1.3-0.2} = \frac{-0.5}{1.1} = -\frac{5}{11} \\
b_4 &= \frac{s(x_4)-s(x_3)}{x_4-x_3} = \frac{1.2-0.4}{1.5-1.3} = \frac{0.8}{0.2} = 4 \\
b_5 &= \frac{s(x_5)-s(x_4)}{x_5-x_4} = \frac{1.5-1.2}{1.8-1.5} = \frac{0.3}{0.3} = 1 \\
b_6 &= \frac{s(x_6)-s(x_5)}{x_6-x_5} = \frac{2.1-1.5}{2.3-1.8} = \frac{0.6}{0.5} = \frac{6}{5} \\
b_7 &= \frac{s(x_7)-s(x_6)}{x_7-x_6} = \frac{2.6-2.1}{2.5-2.3} = \frac{0.5}{0.2} = \frac{5}{2} \\
b_8 &= \frac{s(x_8)-s(x_7)}{x_8-x_7} = \frac{1.9-2.6}{2.8-2.5} = \frac{-0.7}{0.3} = -\frac{7}{3} \\
b_9 &= \frac{s(x_9)-s(x_8)}{x_9-x_8} = \frac{1.5-1.9}{3-2.8} = \frac{-0.4}{0.2} = -2
\end{aligned}$$

$$S_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 0.1 \\ 0.2 + 7(x-0.1) + 50(x-0.1)(x-0.2), & 0.1 \le x \le 0.2 \\ 0.9 - \frac{5}{11}(x-0.2) - \frac{1370}{121}(x-0.2)(x-1.3), & 0.2 \le x \le 1.3 \\ 0.4 + 4(x-1.3) + \frac{960}{11}(x-1.3)(x-1.5), & 1.3 \le x \le 1.5 \\ 1.2 + 1(x-1.5) - \frac{1370}{33}(x-1.5)(x-1.8), & 1.5 \le x \le 1.8 \\ 1.5 + \frac{6}{5}(x-1.8) + \frac{384}{11}(x-1,8)(x-2.3), & 1.8 \le x \le 2.3 \\ 2.1 + \frac{5}{2}(x-2.3) - \frac{685}{11}(x-2.3)(x-2.5), & 2.3 \le x \le 2.5 \\ 2.6 - \frac{7}{3}(x-2.5) + \frac{640}{11}(x-2.5)(x-2.8), & 2.5 \le x \le 2.8 \\ 1.9 - 2(x-2.8) - \frac{685}{11}(x-2.8)(x-3), & 2.8 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= s(x_0) = s(0.0) = 0 \\
a_2 &= s(x_1) = s(0.1) = 0.2 \\
a_3 &= s(x_2) = s(0.2) = 0.9 \\
a_4 &= s(x_3) = s(1.3) = 0.4 \\
a_5 &= s(x_4) = s(1.5) = 1.2 \\
a_6 &= s(x_5) = s(1.8) = 1.5 \\
a_7 &= s(x_6) = s(2.3) = 2.1 \\
a_8 &= s(x_7) = s(2.5) = 2.6 \\
a_9 &= s(x_8) = s(2.8) = 1.9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0 \\
c_2 &= \left(\frac{x_1-x_0}{x_1-x_2}\right)c_1 + \frac{b_1-b_2}{x_1-x_2} = \left(\frac{0.1-0}{0.1-0.2}\right)0 + \frac{2-7}{0.1-0.2} = 50 \\
c_3 &= \left(\frac{x_2-x_1}{x_2-x_3}\right)c_2 + \frac{b_2-b_3}{x_2-x_3} = \left(\frac{0.2-0.1}{0.2-1.3}\right)50 + \frac{7-(-5/11)}{0.2-1.3} = -\frac{1370}{121} \\
c_4 &= \left(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_4}\right)c_3 + \frac{b_3-b_4}{x_3-x_4} = \left(\frac{1.3-0.2}{1.3-1.5}\right)\left(-\frac{1370}{121}\right) + \frac{2-7}{1.3-1.5} = \frac{960}{11} \\
c_5 &= \left(\frac{x_4-x_3}{x_4-x_5}\right)c_4 + \frac{b_4-b_5}{x_4-x_5} = \left(\frac{1.5-1.3}{1.5-1.8}\right)\frac{960}{11} + \frac{2-7}{1.5-1.8} = -\frac{1370}{33} \\
c_6 &= \left(\frac{x_5-x_4}{x_5-x_6}\right)c_5 + \frac{b_5-b_6}{x_5-x_6} = \left(\frac{1.8-1.5}{1.8-2.3}\right)\left(-\frac{1370}{33}\right) + \frac{2-7}{1.8-2.3} = \frac{384}{11} \\
c_7 &= \left(\frac{x_6-x_5}{x_6-x_7}\right)c_6 + \frac{b_6-b_7}{x_6-x_7} = \left(\frac{2.3-1.8}{2.3-2.5}\right)\frac{384}{11} + \frac{2-7}{2.3-2.5} = -\frac{685}{11} \\
c_8 &= \left(\frac{x_7-x_6}{x_7-x_8}\right)c_7 + \frac{b_7-b_8}{x_7-x_8} = \left(\frac{2.5-2.3}{2.5-2.8}\right)\left(-\frac{685}{11}\right) + \frac{2-7}{2.5-2.8} = \frac{640}{11} \\
c_9 &= \left(\frac{x_8-x_7}{x_8-x_9}\right)c_8 + \frac{b_8-b_9}{x_8-x_9} = \left(\frac{2.8-2.5}{2.8-3.0}\right)\frac{640}{11} + \frac{2-7}{2.8-3.0} = -\frac{685}{11}
\end{aligned}$$



Κυβικές splines (3ου βαθμού)

Οι γραμμικές splines δεν έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους στα σημεία που ενώνονται. Αντίστοιχα οι τετραγωνικές δεν έχουν συνεχείς δεύτερες παραγώγους ώστε να εξασφαλίζεται η ομαλή καμπή της γραμμης στους εσωτερικούς κόμβους. Αυτό το πρόβλημα διορθώνουν οι κυβικές splines.

Είναι κυβικά πολυώνυμα της μορφής:

$$S_{3i}(x_i) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

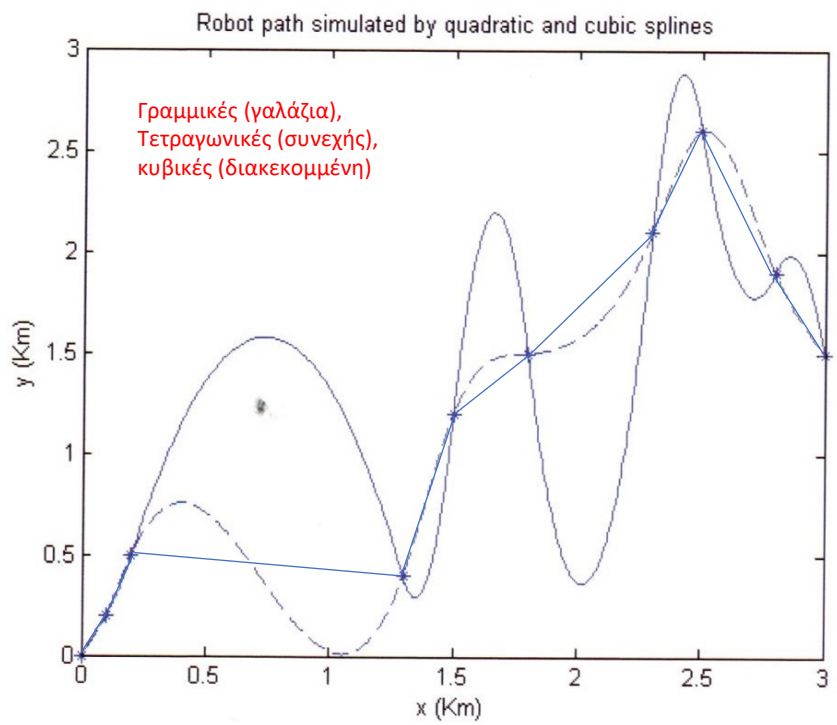
$$b_i = \frac{1}{h_i}(s_{i+1} - s_i) - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

$$d_i = \frac{1}{3h_i}(c_{i+1} - c_i), \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

Οι συντελεστές ci προσδιορίζονται από την λύση του συστήματος Ac=q, όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

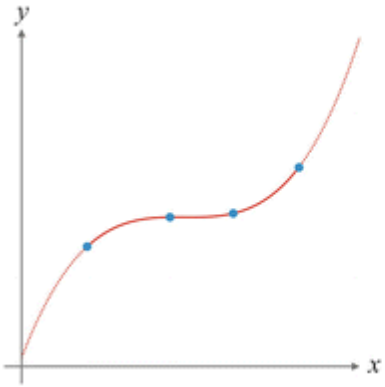
$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(s_2 - s_1) - \frac{3}{h_0}(s_1 - s_0) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(s_n - s_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(s_{n-1} - s_{n-2}) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$



- Πολυώνυμο παρεμβολής (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Πολυώνυμο Lagrange (υπολογισμός τιμής)
- Επαναλαμβανόμενη γραμμική παρεμβολή (υπολογισμός τιμής)
- Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton (υπολογισμός πολυωνύμου)
- Splines
- Γραμμική παλινδρόμηση

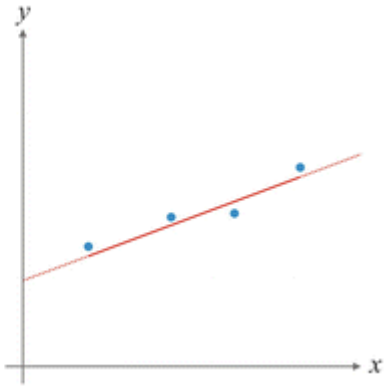
Γραμμική παλινδρόμηση και παρεμβολή: διαφορές

Παρεμβολή



Καμπύλη που διέρχεται από όλα τα σημεία.
Πολυώνυμο, βαθμού n-1

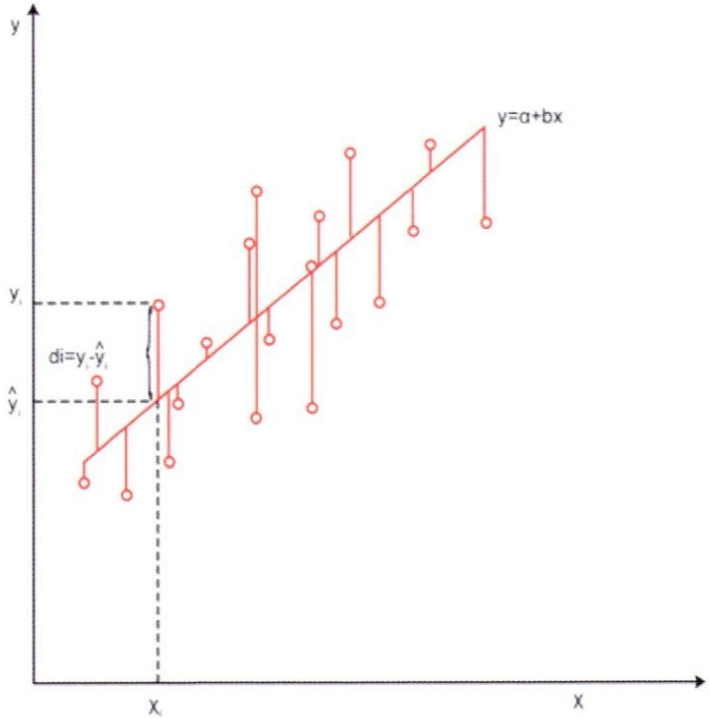
Γραμμική παλινδρόμηση



$$y = a + bx$$

Η βέλτιστη ευθεία της μορφής:
που διέρχεται από n ζεύγη (x,y)
μεγεθών που έχουν γραμμική
σχέση μεταξύ τους, προσδιορίζεται
από τους συντελεστές b και a:

Γραμμική παλινδρόμηση με ελάχιστα τετράγωνα



Η λύση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων είναι:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{n=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i \end{bmatrix}$$

Οι πιο ίσως πρακτικοί τύποι για τον προσδιορισμό των παραμέτρων:

$$b = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Ελάχιστα τετράγωνα ανώτερης τάξης:

Προσέγγιση των δεδομένων με ένα πολυώνυμο βαθμού n:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων είναι γενικά:

$$\begin{aligned}
a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{N} x_i^n &= \sum_{i=1}^{N} y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^3 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{N} x_i^{n+1} &= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\
&\vdots \\
a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^{n+1} + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^{n+2} + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{N} x_i^{2n} &= \sum_{i=1}^{N} x_i^n y_i
\end{aligned}$$

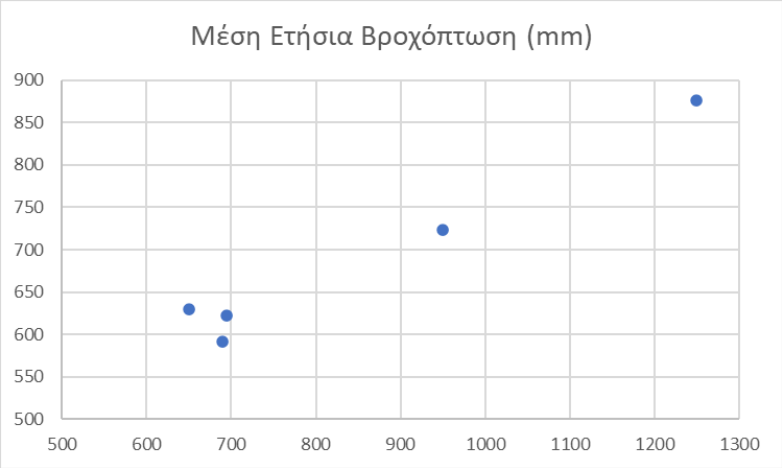
Συχνότερη από την χρήση ελαχίστων τετραγώνων μεγαλύτερης τάξης, είναι αυτή της εφαρμογής της γραμμικής παλινδόμησης με λογαριθμοποίηση

Παράδειγμα γραμμικής παλινδρόμησης στην Υδρολογία, και πώς λύνεται σε excel και αναλυτικά

Επιφανειακή Αναγωγή Σημειακών Μετρήσεων – Μέθοδος Βροχοβαθμίδας

Από την εξέταση των μέσων όρων των ετήσιων βροχοπτώσεων των κοινών υδρολογικών ετών παρατηρήσεων (1961-62 μέχρι 1993-94), των πέντε βροχομετρικών σταθμών προκύπτει ότι ο σταθμός της Κλεισούρας με υψόμετρο 1250 m δέχεται τη μεγαλύτερη βροχόπτωση από τους υπόλοιπους σταθμούς, οι οποίοι και έχουν μικρότερο υψόμετρο

Βροχομετρικοί Σταθμοί	Υψόμετρο (m)	Μέση Ετήσια Βροχόπτωση (mm)
Καστοριά (ΔΕΗ)	690	591.9
Κλεισούρα	1250	875.9
Βυσσινιάς	950	723.8
Μεσοποταμιά	695	622.3
Αργος Ορεστικού	650	629.6



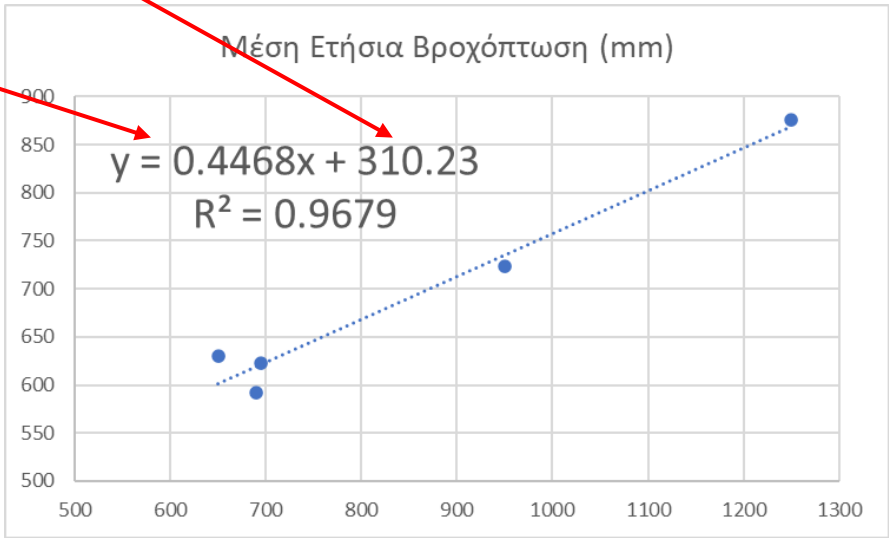
Οι υπολογισμοί:

Βροχομετρικοί Σταθμοί	Υψόμετρο (m)	Μέση Ετήσια Βροχόπτωση (mm)	x-xmean	(x-xmean)^2	y-ymean	prod
Καστοριά (ΔΕΗ)	690	591.9	-157	24649	-96.8	15197.6
Κλεισούρα	1250	875.9	403	162409	187.2	75441.6
Βυσσινιάς	950	723.8	103	10609	35.1	3615.3
Μεσοποταμιά	695	622.3	-152	23104	-66.4	10092.8
Αργος Ορεστικό	650	629.6	-197	38809	-59.1	11642.7
mean=	847	688.7	0	51916	4.55E-14	23198
b=	0.446837199		a=	310.2289		

Πολύ εύκολα στο excel (κλικ):

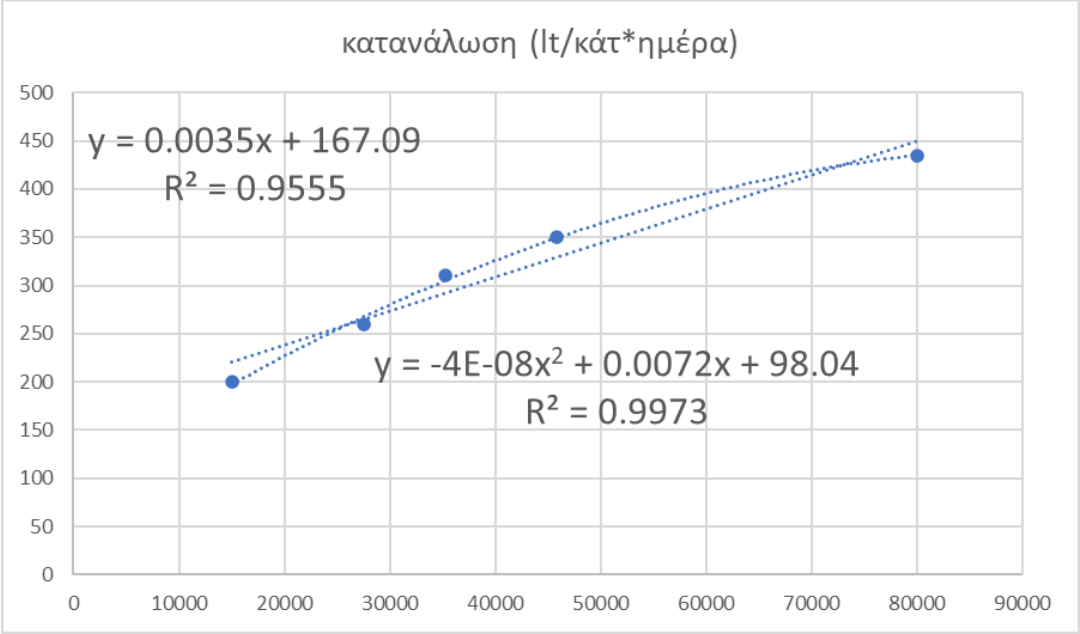
Microsoft Excel Worksheet

η αυτόματα, επιλέγοντας την σειρά των σημείων και ζητώντας trendline :



Μελέτη σε πέντε πόλεις μιάς περιφέρειας κατέγραψε την κατανάλωση νερού σ' αυτές. Εάν η σχέση μεταξύ του πληθυσμού και κατανάλωσης θεωρηθεί γραμμική, να βρεθούν οι συντελεστές της ευθείας παλινδρόμησης.
Επίσης, να βρεθεί η κατανάλωση σε πόλη με πληθυσμό 70000 κατοίκων με βάση το αποτέλεσμα.

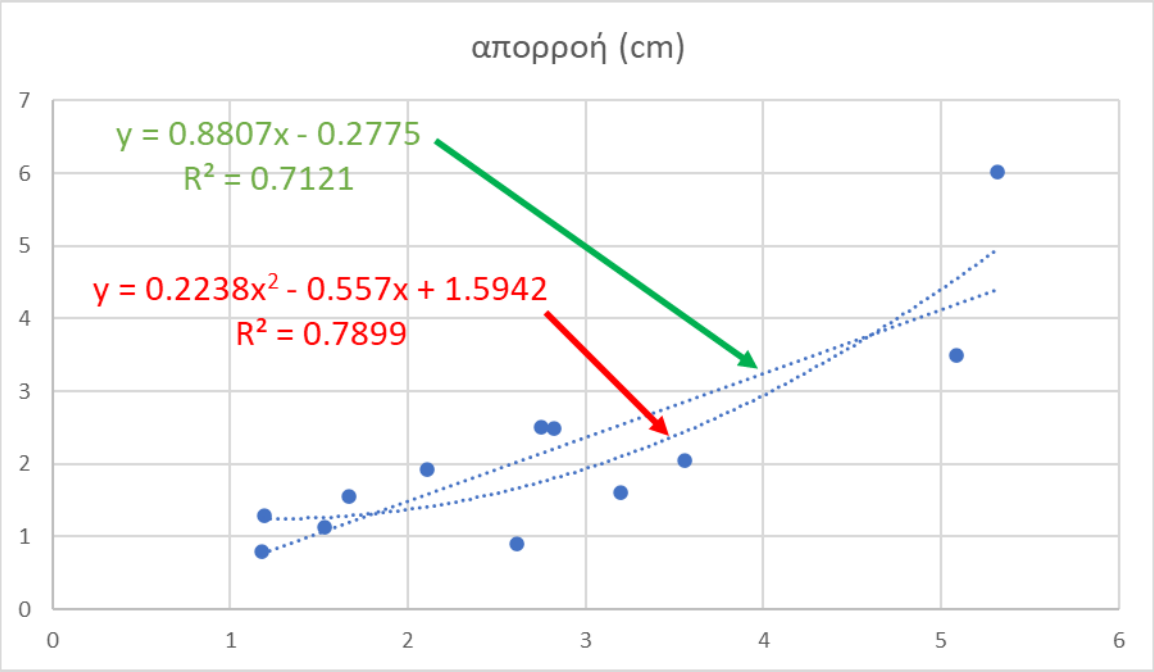
πληθυσμός	κατανάλωση (lt/κάτ*ημέρα)
15000	200
27500	260
35300	310
45800	350
80000	435



y(70000) = 412.09
lt/(κάτ.*day)

Η τετραγωνική παλινδρόμηση προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα

Από τα δεδομένα βροχόπτωσης και απορροής για 12 καταιγίδες, στην ίδια λεκάνη απορροής να βρεθεί η ευθεία παλινδρόμησης της απορροής συναρτήσει της βροχόπτωσης.



βροχόπτωση (cm)	απορροή (cm)
1.18	0.8
5.32	6.01
3.2	1.61
2.75	2.51
1.53	1.13
1.19	1.29
2.11	1.92
5.09	3.49
3.56	2.05
1.67	1.55
2.61	0.91
2.82	2.49

Η τετραγωνική παλινδρόμηση προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.
Ωστόσο, και στις δύο, ο βαθμός συσχέτισης είναι χαμηλός

Σε περίπτωση εκθετικής σχέσης: Προσδιορισμός των συντελεστών με λογαρίθμηση

Η σχέση στάθμης – παροχής σε ποταμό, προσεγγίζεται από σχέση εκθετικού τύπου:

Λογαριθμίζοντας: $Q = ah^b \Rightarrow \ln Q = \ln a + b \ln h$

Που αντιστοιχεί στην γραμμική σχέση της παλινδρόμησης:

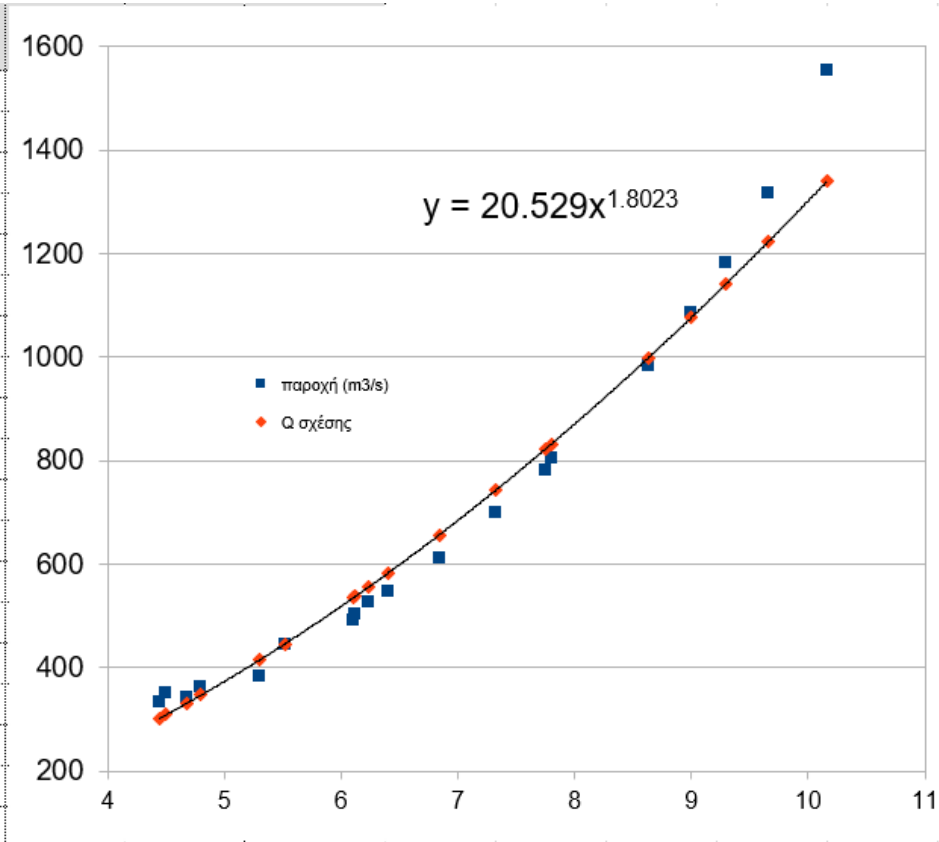
$$y = a_0 + a_1 x$$

Εφαρμόζοντας ΜΕΤ, προκύπτουν τα α0 και α1

Και τα a, b είναι: $a = e^{a_0}$ $\quad b = a_1$

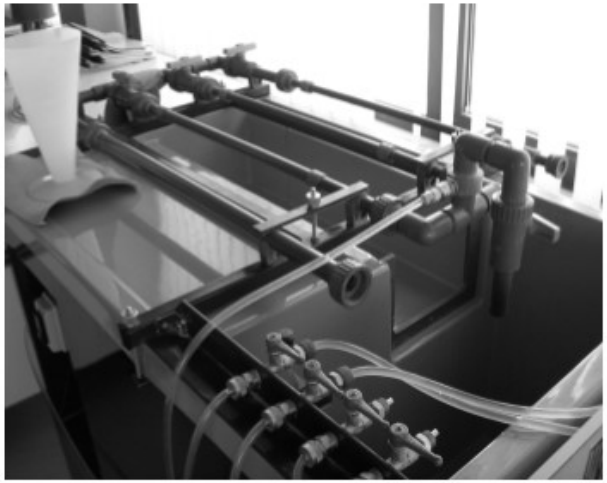
Η σχέση στάθμης – παροχής ποταμού

Ημ/νία	Στάθμη	παροχή (m3/s)	y = lnQ	x=lnh
20/3//74	7.80	804.24	6.690	2.054
29/4/74	6.84	612.36	6.417	1.923
27/5/74	6.12	504.24	6.223	1.812
23/6/74	5.52	444.84	6.098	1.708
20/7/74	4.68	343.74	5.840	1.543
25/8/74	4.44	333.84	5.811	1.491
20/9/74	4.80	362.76	5.894	1.569
15/10/74	5.30	383.75	5.950	1.668
13/11/74	6.40	546.76	6.304	1.856
29/11/74	7.32	699.58	6.550	1.991
23/12/75	7.75	781.08	6.661	2.048
12/01/75	8.63	984.84	6.892	2.155
30/1/75	9.00	1086.72	6.991	2.197
27/2/75	9.29	1181.81	7.075	2.229
04/03/75	9.66	1317.65	7.184	2.268
10/03/75	10.16	1555.25	7.349	2.318
28/4/75	6.24	528.24	6.270	1.831
17/5/75	6.10	490.20	6.195	1.808
18/6/75	4.50	350.00	5.858	1.504



122.251	35.973	233.803	69.409
ΣΥ	ΣΧ	ΣΧΥ	ΣΧ2
3.022	1.802	20.529	1.802
α0	α1	C	N

Σχέση γραμμικών απωλειών ενέργειας σε κλειστό αγωγό σχέση με την ταχύτητα: Δh (U)



m=α_1 περίπου 2

Προσδιορίζω: $c = 10^{\alpha_0}$

Και: f=2gDc/L, περίπου 0,03

Απεικονίζω την εξίσωση $\Delta h = C \bullet U^m$ με 20 σημεία

Γραμμικές απώλειες (Darcy – Weissbach)

10/24/2005

$$\Delta h = f \bullet \frac{L}{D} \bullet \frac{U^2}{2g}$$

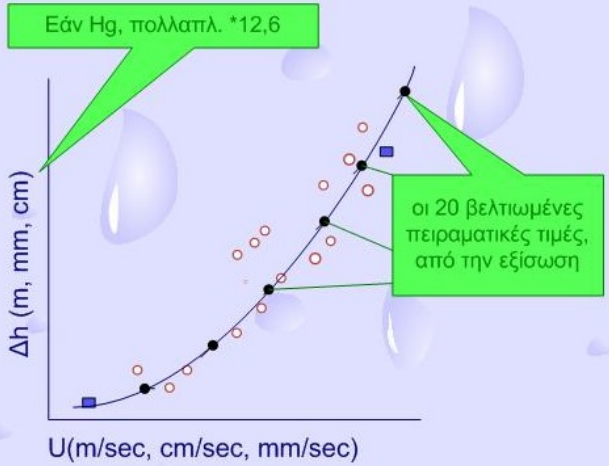
Μέτρηση παροχής: $Q_\pi = \dfrac{\frac{V_1}{t_1} + \frac{V_2}{t_2}}{2} \longrightarrow Q_\pi \left(m^3/\sec\right)$

Ανάγνωση παροχής σε lt/min $\longrightarrow Q_\pi \left(m^3/\sec\right)$

$$U = \frac{Q_\pi}{A}$$

A: L=73cm, D=17mm

B: L=23cm, D=19,6mm



Ποιος ο συντελεστής τριβής f?
(υλικό + τραχύτητα)

$$\Delta h = f \bullet \frac{L}{D} \bullet \frac{U^2}{2g}$$

Θέτω c=fL/2gD
Και 2=m

$$\Delta h = C \bullet U^m$$

$$\log \Delta h = \log C + m \bullet \log U$$

$y = \alpha_0 + \alpha_1 x$

ΜΕΤ λογαρίθμων, 2Χ2

Προσδιορισμός α_0 και α_1

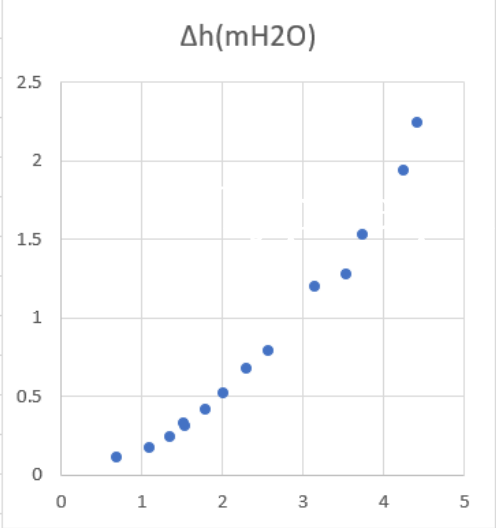
Σχέση γραμμικών απωλειών ενέργειας σε κλειστό αγωγό σχέση με την ταχύτητα: Δh (U)

$$\Delta h = CU^m$$

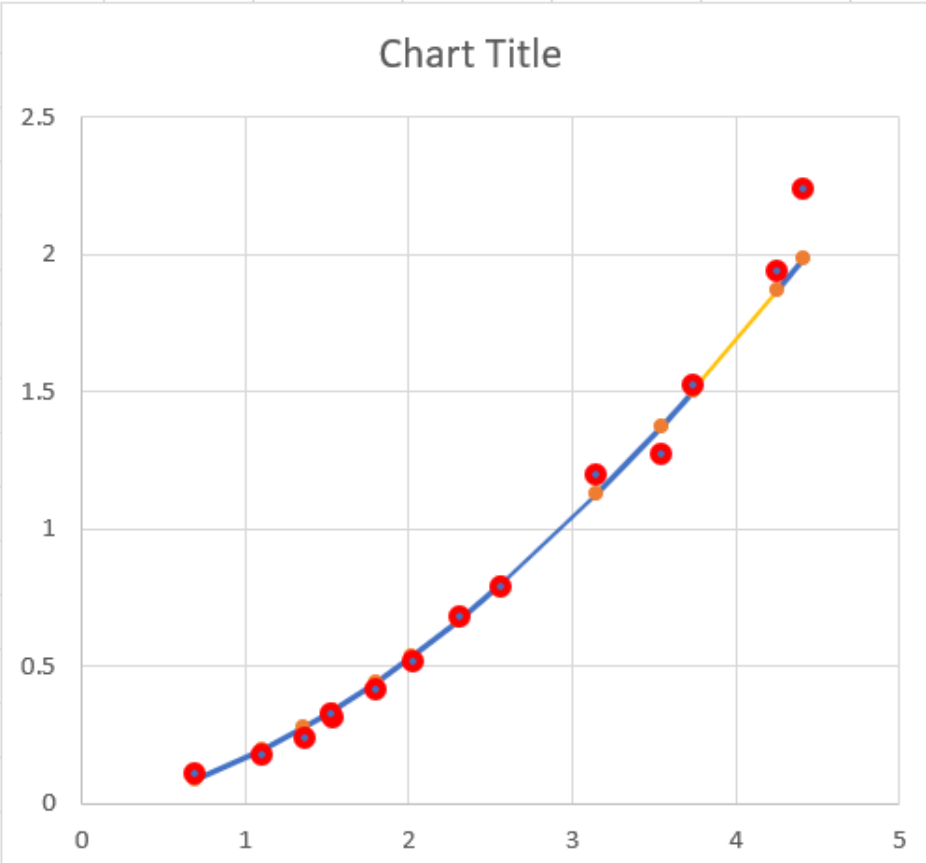
$$\log(\Delta h) = logC + m\ logU$$

$$y = a + bx$$

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
U(m/s)	Δh(mH2O)						x=logU	y=logΔh	x-xav	y-yav	(x-xav)^2	J*K
0.6897835	0.1134						-0.1613	-0.9454	-0.49	-0.7142	0.240255	0.350059
1.1017006	0.1764						0.0421	-0.7535	-0.29	-0.5223	0.082258	0.149796
1.35709675	0.2394						0.1326	-0.6209	-0.2	-0.3897	0.038518	0.076475
1.53582591	0.315						0.1863	-0.5017	-0.14	-0.2705	0.020315	0.038551
1.51523847	0.3276						0.1805	-0.4347	-0.15	-0.2534	0.02202	0.037609
1.79783792	0.4158						0.2548	-0.3811	-0.07	-0.1499	0.005494	0.011111
2.01866983	0.5166						0.3051	-0.2868	-0.02	-0.0556	0.000567	0.001324
2.30365137	0.6804						0.3624	-0.1672	0.034	0.064	0.001125	0.002146
2.56292262	0.7938						0.4087	-0.1003	0.08	0.1309	0.006378	0.010456
3.14367823	1.197						0.4974	0.0781	0.169	0.3093	0.028415	0.052139
3.54458245	1.2726						0.5496	0.1047	0.221	0.3359	0.048706	0.074132
3.73686869	1.5246						0.5725	0.1832	0.244	0.4144	0.059359	0.100955
4.25351613	1.9404						0.6287	0.2879	0.3	0.5191	0.089926	0.155667
4.41322976	2.2428						0.6448	0.3508	0.316	0.582	0.099784	0.183846
							0.3289	**-0.2312**			**0.05308**	**0.088876**
							xav	yav				
										b =	1.674384	=m
										a=	-0.78187	
										C=10^a=	0.165246	



U	Δh	Δh'
0.69	0.113	0.089
1.102	0.176	0.194
1.357	0.239	0.276
1.536	0.315	0.339
1.515	0.328	0.331
1.798	0.416	0.441
2.019	0.517	0.536
2.304	0.68	0.668
2.563	0.794	0.799
3.144	1.197	1.125
3.545	1.273	1.375
3.737	1.525	1.502
4.254	1.94	1.866
4.413	2.243	1.985



Ευχαριστώ για την προσοχή σας !