Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων

- Μέθοδος Euler
- Μέθοδοι Runge – Kutta
- Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
- Μέθοδος (σχήμα) Crank - Nicolson

Γενική διατύπωση του προβλήματος

- Δεδομένα: $y' = f(x, y)$, $y(x_0)=y_0$
- Αποτελέσματα: $y(x_1)$
- Με προσεγγιστική διαδικασία: $x_{n+1} - x_n = h$ $\kappa\alpha\iota$ $x_n = x_0 + nh$

διαδοχικά $\longrightarrow$ $y(x_{n+1}) \rightarrow y(x_1)$

Παραδείγματα προβλημάτων:

$y' = te^{3t} - 2y$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 0$, with $h = 0.5$; actual solution $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

$y' = 1 + (t - y)^2$, $2 \le t \le 3$, $y(2) = 1$, with $h = 0.5$; actual solution $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$.

$y' = 1 + y/t$, $1 \le t \le 2$, $y(1) = 2$, with $h = 0.25$; actual solution $y(t) = t \ln t + 2t$.

$y' = \cos 2t + \sin 3t$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$, with $h = 0.25$; actual solution $y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.

Μέθοδος Euler

Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης:

$$y' = f(x, y) \quad \gamma\iota\alpha \;\; y(x_0) = y_0 \rightarrow y(x_1) = y_1$$

Έχει μοναδική λύση εάν $\frac{\partial f}{\partial y}$ συνεχής στο διάστημα

Επιλέγεται σταθερό βήμα ολοκλήρωσης h, οπότε:

$$x_{n+1} - x_n = h \;\kappa\alpha\iota\; x_n = x_0 + nh$$

Από το θεώρημα Taylor:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \;\; \text{όπου} \;\; x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}$$

Οπότε κατά προσέγγιση:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n)$$

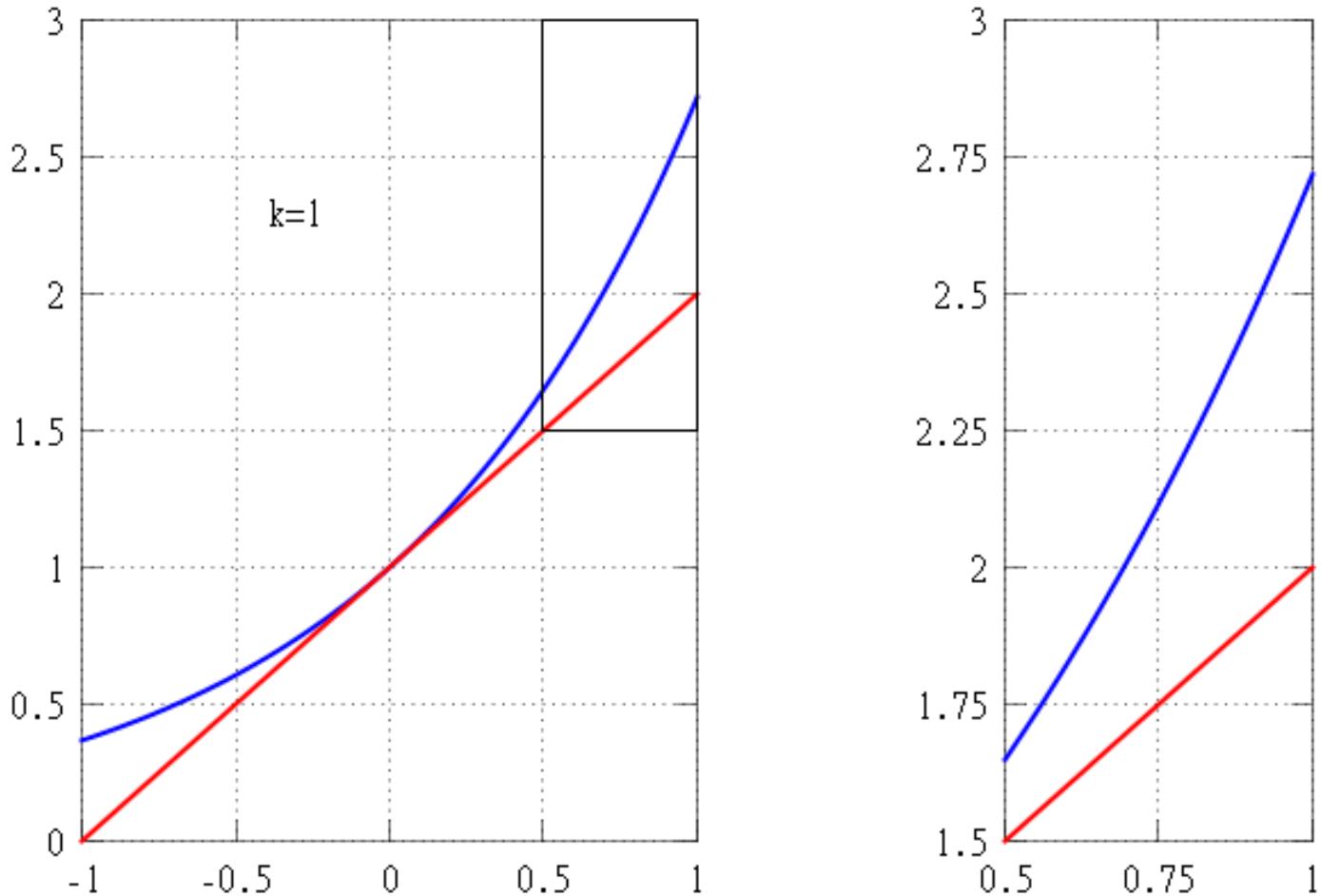
Αλλά είναι (από την αρχική σχέση):

$$y'(x_n) = f[x_n, y(x_n)]$$

Οπότε την ακριβή λύση $y(x_{n+1})$ προσεγγίζουμε από την y_n του νιοστού βήματος:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \Delta y_n$$

Η εκθετική συνάρτηση $y = e^x$ (κόκκινη γραμμή) και το αντίστοιχο πολυώνυμο Taylor βαθμού k



Μέθοδος Euler

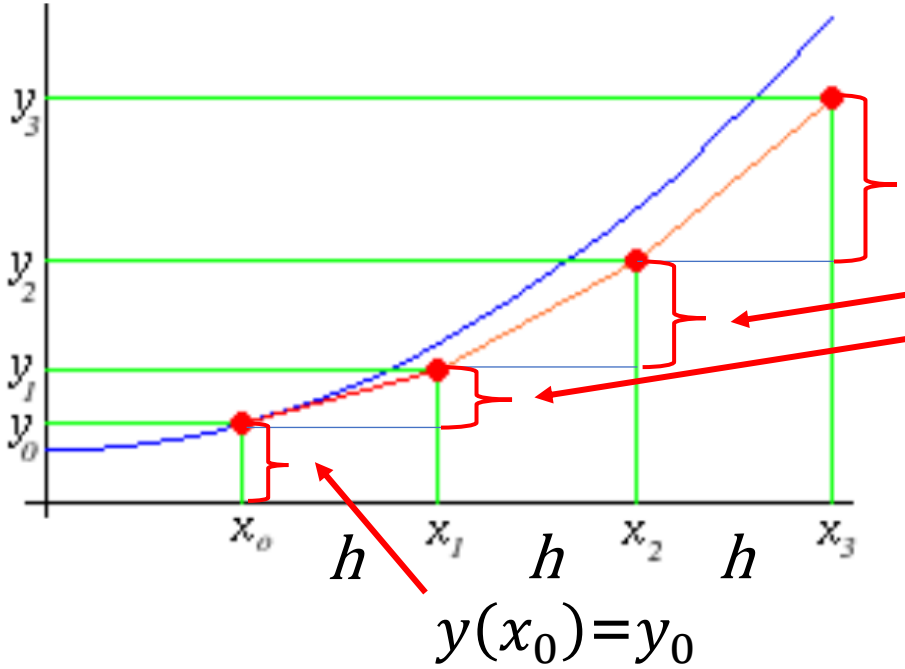
<u>Δεδομένα:</u> διαφορική εξίσωση με αρχική συνθήκη και διάστημα τιμών

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y' = f(x, y)$$

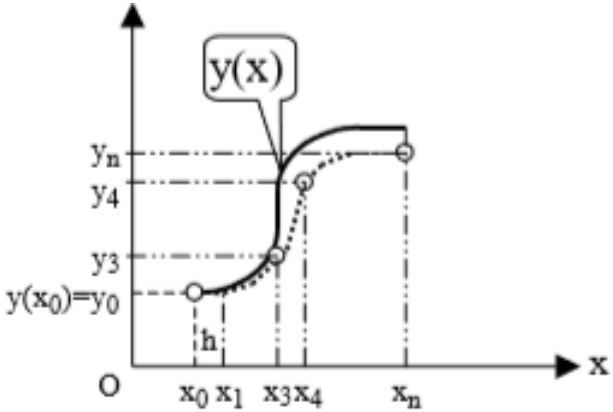
$$hf(x_n, y_n)$$

$$hf(x_n, y_n) = h * \tan(\theta)$$



Όπως φαίνεται και στα δύο γραφήματα, το σφάλμα αυξάνεται με τον αριθμό των βημάτων

Μέθοδος Euler - σφάλμα



Αγνοώντας το σφάλμα στρογγυλοποίησης και θεωρώντας το σφάλμα διακριτοποίησης, το οποίο αποδεικνύεται ότι είναι ανάλογο του βηματος h, και μειώνεται εκθετικά με τη μεταβολή του x:

$$\varepsilon_n = y_n - y(x_n)$$

$$\varepsilon_n < \frac{1}{2} h.M \frac{e^{(x_n - x_0)} - 1}{L}$$

Στο συγκεκριμένο διάστημα, προσδιορίζονται με το καθορισμένο βήμα για τα διαδοχικά x_n τα y_n, $f(x_n,y_n)$, y_{n+1} καθώς και το θεωρητικό σφάλμα, από τη σχέση:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \Delta y_n$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \left[1 + h.f_y(x_n, \bar{y}_n) \right] - \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

Προσοχή: f_y η παράγωγος της f ως προς y

<u>Ασκηση:</u> Να λυθεί η $y' = y - x$ στο διάστημα [0,1] με h=0.25, εάν y(0)=2

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \Delta y_n$ $\quad y' = f(x, y)$ $\quad y(x_0)=y_0$

$x_0 =?$ $\quad y_0 =?$ $\quad f(x, y) =?$ $\quad y_{n+1} = y_n +?$

Ασκηση: Να λυθεί η $y' = y - x$ στο διάστημα [0,1] με h=0.25, εάν y(0)=2

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \Delta y_n \qquad y' = f(x,y) \qquad y(x_0)=y_0$$

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 2 \qquad f(x,y) = y - x$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.25 * (y_n - x_n)$$

n	xn	yn	yn-xn	y(n+1)
0	0	2		
1	0.25	2	2	2.5
2	0.5	2.5	2.25	3.0625
3	0.75	3.0625	2.5625	3.703125
4	1	3.703125	2.953125	4.441406

Ασκηση: Να λυθεί η $y' = y - x$ στο διάστημα [0,1] με h=0.1 (ή 0.05, ή 0.02), εάν y(0)=2

3 από 4

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \Delta y_n \qquad y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 2 \qquad f(x, y) = y - x$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.1 * (y_n - x_n)$$

Υπολογισμοί για h=0.1, 0.05, 0.02:

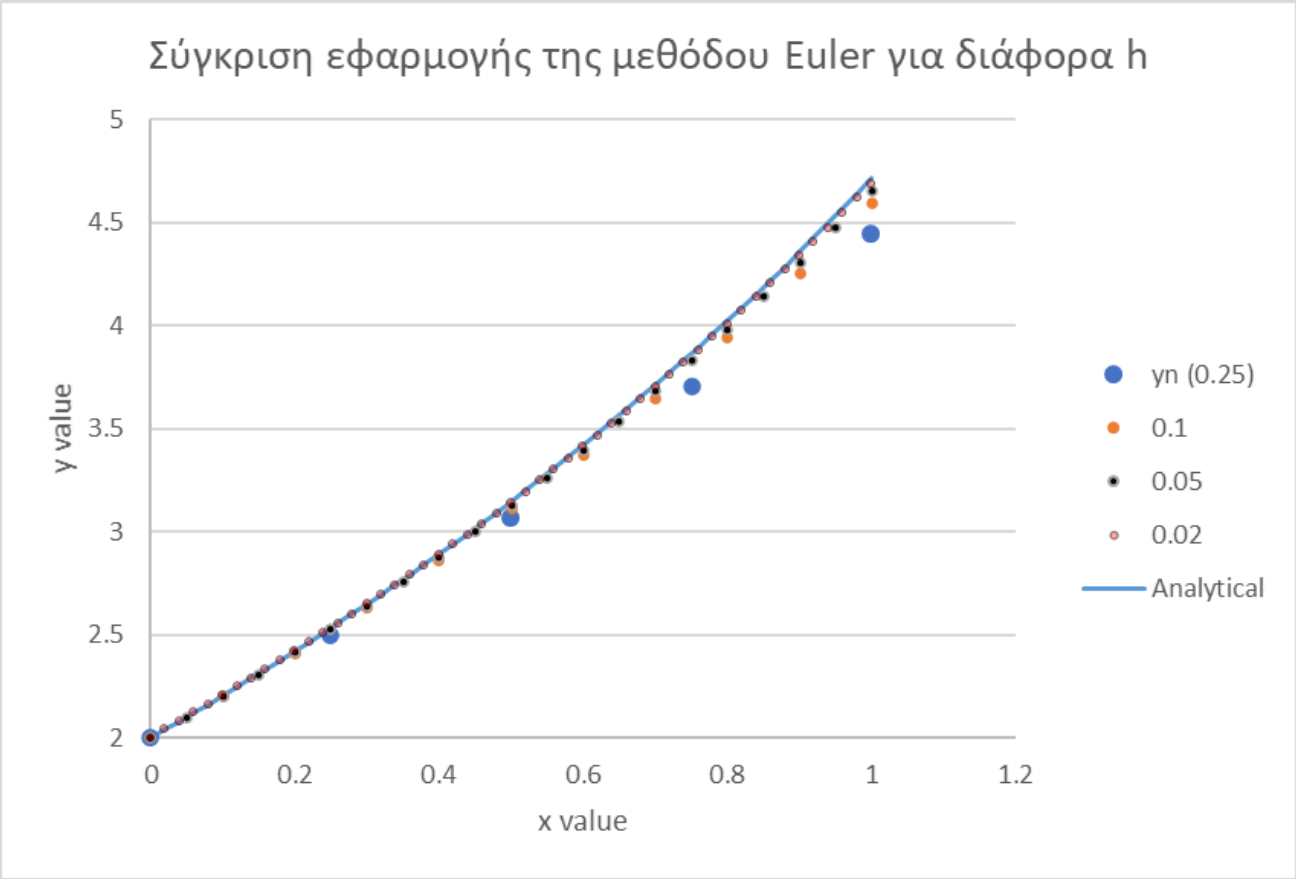
Microsoft Excel Worksheet

Ασκηση: Να λυθεί η $y' = y - x$ στο διάστημα [0,1] με h=0.1 (ή 0.05, ή 0.02), εάν y(0)=2

4 από 4

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + \Delta y_n \qquad y' = f(x,y) \qquad y(x_0)=y_0$$

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 2 \qquad y_{n+1} = y_n + 0.1 * (y_n - x_n)$$



Οι τιμές της πραγματικής συνάρτησης φαίνονται στο analytical:
Η λύση της εξίσωσης είναι η :

$$y = e^x + x + 1$$

h	αποτέλ.	σχ.σφάλμα
0.25	4.441406	0.05868144
0.10	4.593742	0.02639507
0.05	4.653298	0.01377284
0.02	4.718282	-3.765E-16
inf	4.718282	0

Άσκηση

Δίνεται η διαφορική εξίσωση $dy = x.y^2.dx$ με αρχική συνθήκη $y(1) = 1$. Να λυθεί στο διάστημα [1.0, 1.3] με τη μέθοδο Euler και με $h = 0.1$. Να εκτιμηθεί το σφάλμα εφαρμόζοντας την ανάλυση σφάλματος της μεθόδου και να υπολογιστεί το πραγματικό σφάλμα.

Γενικός τύπος: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

Επεξεργασία δεδομένων: $y' = f(x, y) = xy^2$ και επομένως:

Διαδοχικές προσεγγίσεις: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.1x_n y_n^2$

$y' = f(x, y) \quad y(1)=1$

για το θεωρητικό σφάλμα, είναι απαραίτητη και η y''(x), όπως φαίνεται στην εξίσωση:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n\left[1 + hf_y(x_n, \bar{y}_n)\right] - \frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$$

επομένως $y'' = (xy^2)' = f_x x' + f_y y' = f_x + 2xy(xy^2) = y^2 + 2x^2y^3$

Αφού: $f_y = 2xy \qquad f_x = y^2$

Διαδοχικός τύπος θεωρητικού σφάλματος:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n[1 + 2hxy] - \frac{h^2}{2}(y^2 + 2x^2y^3) = \varepsilon_n(1 + 0.2xy) - 0.005(y^2 + 2x^2y^3)$$

Άσκηση

Δίνεται η διαφορική εξίσωση $dy = x.y^2.dx$ με αρχική συνθήκη $y(1) = 1$. Να λυθεί στο διάστημα [1.0, 1.3] με τη μέθοδο Euler και με $h = 0.1$. Να εκτιμηθεί το σφάλμα εφαρμόζοντας την ανάλυση σφάλματος της μεθόδου και να υπολογιστεί το πραγματικό σφάλμα.

2 από 3

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n\left[1 + hf_y(x_n, \bar{y}_n)\right] - \frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$$

Σφάλμα μεθόδου, θεωρητικό προσεγγιστικό σφάλμα:

Επεξεργασία δεδομένων :

Διαδοχικές προσεγγίσεις:

x από 1.0 έως 1.3 (h=0.1)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.1x_n y_n^2$$

$$f(x,y) = xy^2$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n(1 + 0.2xy) - 0.005(y^2 + 2x^2y^3)$$

1+0.2xy

$0.005(y^2+2x^2y^3)$

Microsoft Excel Worksheet

x	y	f(x,y)	1+h fy	0.5 h2 y''	σφ.μεθοδου	πραγμ.σφ.
1.0	1.000	1.000	1.200	0.015	0.000	0.000
1.1	1.100	1.331	1.242	0.022	-0.019	-0.017
1.2	1.233	1.776	1.296	0.035	-0.051	-0.049
1.3	1.411	2.384	1.367	0.057	-0.113	-0.116

το πραγματικό σφάλμα, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί μόνο εάν λυθεί η εξίσωση, δίνεται στην επόμενη σελίδα.

Άσκηση

Δίνεται η διαφορική εξίσωση $dy = x.y^2.dx$ με αρχική συνθήκη $y(1) = 1$. Να λυθεί στο διάστημα [1.0, 1.3] με τη μέθοδο Euler και με $h = 0.1$. Να εκτιμηθεί το σφάλμα εφαρμόζοντας την ανάλυση σφάλματος της μεθόδου και να υπολογιστεί το πραγματικό σφάλμα.

3 από 3

Επεξεργασία δεδομένων (εάν δεν μπορούσε να λυθεί αναλυτικά η διαφορική εξίσωση):

$y' = f(x,y) = xy^2$ και επομένως: $f_y = 2xy$ $f_x = y^2$

για το θεωρητικό σφάλμα, είναι απαραίτητη και η y''(x):

$$y'' = (xy^2)' = f_x x' + f_y y' = f_x + 2xy(xy^2) = y^2 + 2x^2y^3$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.1 x_n y_n^2$$

Διαδοχικές προσεγγίσεις:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n\left[1 + hf_y(x_n, \bar{y}_n)\right] - \frac{h^2}{2}y''(\xi_n)$$

x από 1.0 έως 1.3 (h=0.1)

$y_{n+1}=y_n+0.1x_ny_n^2$

$f(x,y) = xy^2$

1+0.1*2xy

$0.5*0.1^2(y^2+2x^2y^3)$

x	y	f(x,y)	1+h fy	0.5 h2 y''	σφ.μεθοδου	πραγμ.σφ.
1.0	1.000	1.000	1.200	0.015	0.000	0.000
1.1	1.100	1.331	1.242	0.022	-0.019	-0.017
1.2	1.233	1.776	1.296	0.035	-0.051	-0.049
1.3	1.411	2.384	1.367	0.057	-0.113	-0.116

Επεξεργασία δεδομένων (για την εύρεση του πραγματικού σφάλματος):

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

Προσδιορισμός σταθεράς:

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$$

Τελική λύση: εξίσωση y(x):

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{2}{3 - x^2}$$

$$y_n - y_{\theta\varepsilon\omega\rho} = y_n - \frac{2}{3 - x^2}$$

Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων

- Μέθοδος Euler
- Μέθοδοι Runge – Kutta
- Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
- Μέθοδος (σχήμα) Crank - Nicolson

Μέθοδοι Runge - Kutta

Euler: μικρή ακρίβεια. Περαιτέρω ανάπτυξη σειράς Taylor, επιβάρυνση υπολογισμών
Runge-Kutta: αποφυγή παραγώγων ανώτερης τάξης, με επιδίωξη ακρίβειάς τους.
Το $y(x_{n+1})$ αναπτύσεται σε σειρά Taylor:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h.y'(x_n) + \frac{h^2}{2!}.y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}.y'''(x_n) + \ldots$$

$$= y(x_n) + h.f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!}.(f_x + f.f_y)\Big|_{(x_n, y_n)} +$$

$$+ \frac{h^3}{6}.\ f_{xx} + 2f.f_{xy} + f_{yy}.f^3 + f_x.f_y + f_y{}^2.f\ \Big|_{(x_n, y_n)} + \varnothing(h^4)$$

Γενικό σχήμα Runge –Kutta:

$$y_{n+1} = y_n + aK_1 + bK_2 \quad \begin{cases} K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + ah, y_n + bK_1) \end{cases}$$

Σχήμα Runge –Kutta 2ης τάξης:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \quad \begin{cases} K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) \end{cases}$$

Από: Σαρρής και Καρακασίδης, «Αριθμητικές Μέθοδοι και εφαρμογές για Μηχανικούς», 2015

Άσκηση 6.19) Μια προσέγγιση για τη μετάδοση ασθενειών ή πληροφορίας περιγρά-

$$y' = a(A - y)y$$

όπου y ο αριθμός των ατόμων που έχουν νοσήσει (ή πληροφορηθεί τα σχετικά νέα), A ο συνολικός πληθυσμός και a σταθερά. Εάν σε μια περίπτωση $A = 1000, a = 36 \cdot 10^{-4}$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουν νοσήσει 2 άτομα, να βρεθεί ο αριθμός των νοσούντων τη χρονική στιγμή $t = 10$. Να συγκρίνεται με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης που περιγράφεται από

$$y(t) = \frac{A}{1 + (\frac{A}{y_0} - 1)e^{-aAt}}$$

Σχήμα Runge –Kutta 2ης τάξης:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \quad \begin{cases} K_1 = hf(x_n, y_n) \\ K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) \end{cases}$$

$$y' = 36 * 10^{-4} * (1000 - y) * y \qquad y(0) = 2 \qquad h=1$$

$$f(x, y) = 36 * 10^{-4} * (1000 - y) * y$$

Από: Σαρρής και Καρακασίδης, «Αριθμητικές Μέθοδοι και εφαρμογές για Μηχανικούς», 2015

$$y' = a(A - y)y$$

Σχήμα Runge –Kutta 2ης τάξης:

$$y(0) = 2$$

$$y' = 36 * 10^{-4} * (1000 - y) * y$$

$$f(x, y) = 36 * 10^{-4} * (1000 - y) * y$$

$$h=1$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1)$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = \boldsymbol{h * \left(36 * 10^{-4}(1000 - y_n) * y_n\right)} = 36 * 10^{-4}(1000 - y_n) * y_n$$

$$K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) = \boldsymbol{h * \left(36 * 10^{-4} * (1000 - y_n - K_1) * (y_n + K_1)\right)} =$$

$$36 * 10^{-4} * (1000 - y_n - K_1) * (y_n + K_1)$$

h=	0.1				=0.0036	
n	x	y	K1	xn+h	K2	y(n+1)
0	0	2	=B$1*F$1*(1000-C4)*C4	=B4+B$1	=B$1*F$1*(1000-C4-D4)*(C4+D4)	=C4+0.5*(F4+D4)
1	=B4+B$1	=G4	=B$1*F$1*(1000-C5)*C5	=B5+B$1	=B$1*F$1*(1000-C5-D5)*(C5+D5)	=C5+0.5*(F5+D5)
2	=B5+B$1	=G5	=B$1*F$1*(1000-C6)*C6	=B6+B$1	=B$1*F$1*(1000-C6-D6)*(C6+D6)	=C6+0.5*(F6+D6)
3	=B6+B$1	=G6	=B$1*F$1*(1000-C7)*C7	=B7+B$1	=B$1*F$1*(1000-C7-D7)*(C7+D7)	=C7+0.5*(F7+D7)
4	=B7+B$1	=G7	=B$1*F$1*(1000-C8)*C8	=B8+B$1	=B$1*F$1*(1000-C8-D8)*(C8+D8)	=C8+0.5*(F8+D8)
5	=B8+B$1	=G8	=B$1*F$1*(1000-C9)*C9	=B9+B$1	=B$1*F$1*(1000-C9-D9)*(C9+D9)	=C9+0.5*(F9+D9)
6	=B9+B$1	=G9	=B$1*F$1*(1000-C10)*C10	=B10+B$1	=B$1*F$1*(1000-C10-D10)*(C10+D10)	=C10+0.5*(F10+D10)
7	=B10+B$1	=G10	=B$1*F$1*(1000-C11)*C11	=B11+B$1	=B$1*F$1*(1000-C11-D11)*(C11+D11)	=C11+0.5*(F11+D11)
8	=B11+B$1	=G11	=B$1*F$1*(1000-C12)*C12	=B12+B$1	=B$1*F$1*(1000-C12-D12)*(C12+D12)	=C12+0.5*(F12+D12)
9	=B12+B$1	=G12	=B$1*F$1*(1000-C13)*C13	=B13+B$1	=B$1*F$1*(1000-C13-D13)*(C13+D13)	=C13+0.5*(F13+D13)
10	=B13+B$1	=G13	=B$1*F$1*(1000-C14)*C14	=B14+B$1	=B$1*F$1*(1000-C14-D14)*(C14+D14)	=C14+0.5*(F14+D14)

Σχήμα Runge –Kutta 2ης τάξης:

$$y' = 36 * 10^{-4} * (1000 - y) * y \qquad y(0) = 2$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

$$f(x, y) = 36 * 10^{-4} * (1000 - y) * y$$

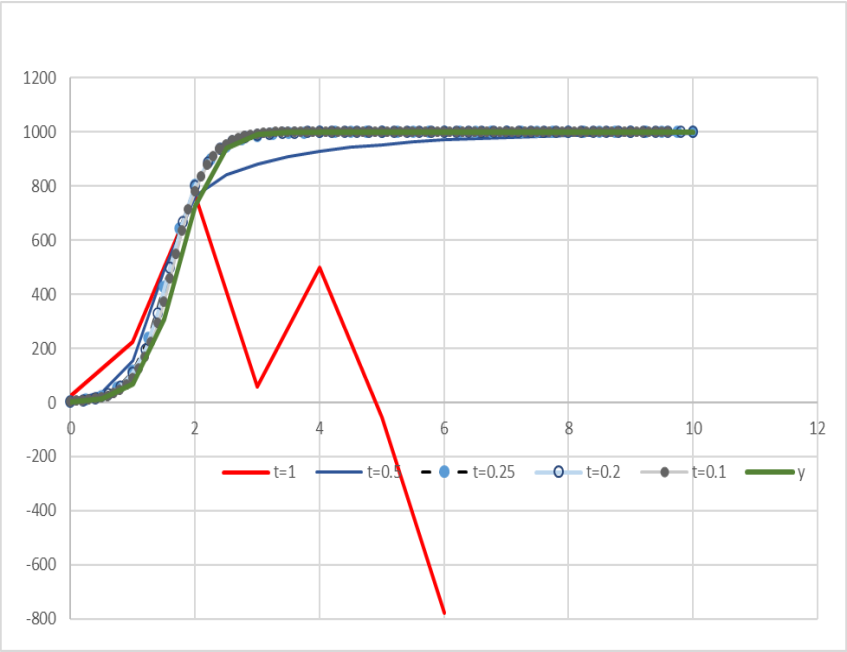
$$K_1 = hf(x_n, y_n)$$

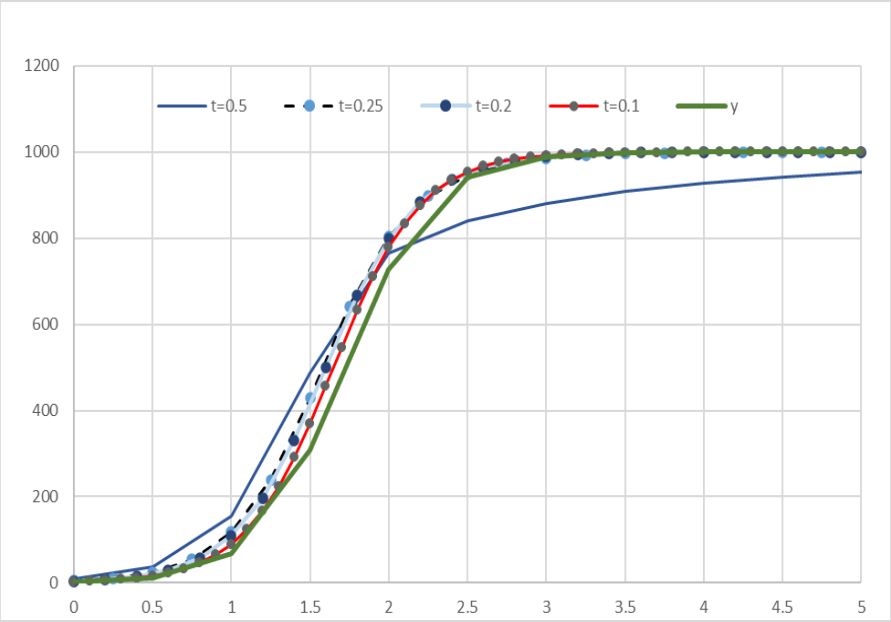
$$K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1)$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = 36 * 10^{-4}(1000 - y_n) * y_n$$

$$K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) = 36 * 10^{-4} * (1000 - y_n - K_1) * (y_n + K_1)$$

$$h=1$$





Μέθοδος Runge – Kutta 4ης τάξης

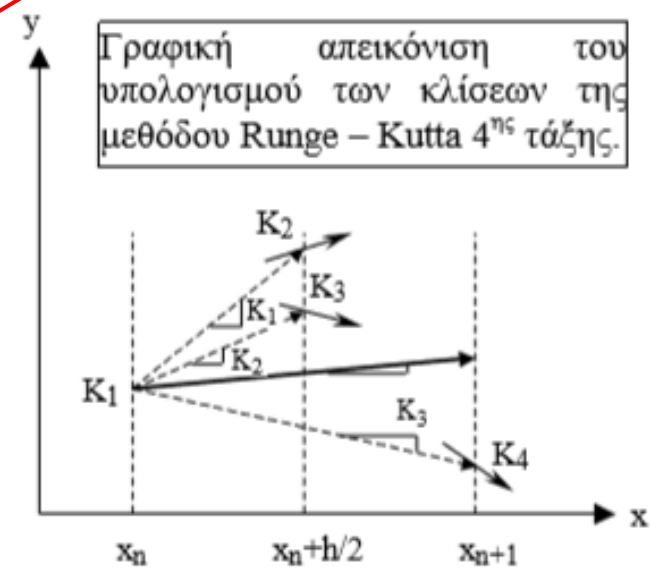
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = y_n + \Delta y_n$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n) \qquad K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) \qquad K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3)$$

n	x	y	K = h.f(x, y)	Δy
0	**x_0**	**y_0**	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + h/2$	$y_0 + K_1^{(0)}/2$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0 + h/2$	$y_0 + K_2^{(0)}/2$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				$\Delta y_0 =$ $(1/6).\Sigma\Delta y$
				$y_1 = y_0 + \Delta y_0$
1	**x_1**	**y_1**	$K_1^{(1)}$	$K_1^{(1)}$
...	...	...	...	...

Γραφική απεικόνιση του υπολογισμού των κλίσεων της μεθόδου Runge – Kutta 4ης τάξης.



Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y' = 0.25y^2 + x^2$ στο διάστημα [0, 0.5], με βήμα h = 0.1 και αρχική συνθήκη y(0) = -1.

n	x	y	K =h.f(x,y)	Δy
0	**0**	**-1**	0.025	0.025
	0.05	-0.98750	0.024629	0.049258
	0.05	-0.98769	0.024638	0.049276
	0.1	-0.97536	0.024783	0.024783
				Δy=0.02472
1	**0.1**	**-0.97528**	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

1

2: διαδοχικά K1, y, K2, y κλπ

3

4

n	x	y	K = h.f(x, y)	Δy
0	x_0	y_0	$K_1^{(0)}$	$K_1^{(0)}$
	$x_0 + h/2$	$y_0 + K_1^{(0)}/2$	$K_2^{(0)}$	$2K_2^{(0)}$
	$x_0 + h/2$	$y_0 + K_2^{(0)}/2$	$K_3^{(0)}$	$2K_3^{(0)}$
	$x_0 + h$	$y_0 + K_3^{(0)}$	$K_4^{(0)}$	$K_4^{(0)}$
				$\Delta y_0 = (1/6).\sum\Delta y$
				$y_1 = y_0 + \Delta y_0$
1	x_1	y_1	$K_1^{(1)}$	$K_1^{(1)}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

n	x	y	K=h f(x,y)	Δy
0	0	-1	0.025	0.025
	0.05	-0.98750	0.024629	0.049258
	0.05	-0.98769	0.024638	0.049276
	0.1	-0.97536	0.024783	0.024783
				0.02472
1	0.1	-0.97528	0.024779	0.024779
	0.15	-0.96289	0.025429	0.050858
	0.15	-0.96257	0.025413	0.050827
	0.2	-0.94987	0.026556	0.026556
				0.025503
2	0.2	-0.94978	0.026552	0.026552
	0.25	-0.93650	0.028176	0.056352
	0.25	-0.93569	0.028138	0.056276
	0.3	-0.92164	0.030235	0.030235
				0.028236
3	0.3	-0.92154	0.030231	0.030231
	0.35	-0.90643	0.03279	0.06558
	0.35	-0.90515	0.032732	0.065464
	0.4	-0.88881	0.03575	0.03575
				0.032838
4	0.4	-0.8887	0.035745	0.035745
	0.45	-0.87083	0.039209	0.078417
	0.45	-0.86910	0.039133	0.078267
	0.5	-0.84957	0.043044	0.043044
				0.039246
5	0.5	-0.84946		

Να λυθεί η $dy = xy^2 dx \Leftrightarrow y' = xy^2$ με αρχικη συνθηκη $y(1) = 1$, στο διάστημα [1.0,1.3] με τη μέθοδο Runge – Kutta 4ης τάξης και με h=0.1. Να εκτιμηθεί το σφάλμα της μεθόδου, και να υπολογιστεί το πραγματικό σφάλμα.

1

$$f(x,y) = xy^2$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = 0.1x_n y_n^2$$

$$K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) = 0.1(x_n + 0.05)\left(y_n + \frac{K_1}{2}\right)^2$$

$$K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) = 0.1(x_n + 0.05)\left(y_n + \frac{K_2}{2}\right)^2$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) = 0.1(x_n + 0.1)(y_n + K_3)^2$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = y_n + \Delta y_n$$

Να λυθεί η $dy = xy^2 dx \Leftrightarrow y' = xy^2$ με αρχικη συνθηκη $y(1) = 1$, στο διάστημα [1.0,1.3] με τη μέθοδο Runge – Kutta 4ης τάξης και με h=0.1. Να εκτιμηθεί το σφάλμα της μεθόδου, και να υπολογιστεί το πραγματικό σφάλμα.

$$f(x,y) = xy^2$$

2

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = 0.1x_n y_n^2$$

$$K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) = 0.1(x_n + 0.05)\left(y_n + \frac{K_1}{2}\right)^2$$

$$K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) = 0.1(x_n + 0.05)\left(y_n + \frac{K_2}{2}\right)^2$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) = 0.1(x_n + 0.1)(y_n + K_3)^2$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = y_n + \Delta yn$$

Microsoft Excel Worksheet

n	x	y	K=h f(x,y)	Δy
0	1	1	0.1	0.1
	1.05	1.05000	0.115763	0.231525
	1.05	1.05788	0.117507	0.235014
	1.1	1.11751	0.13737	0.13737
				0.117318
1	1.1	1.117318	0.137324	0.137324
	1.15	1.18598	0.161753	0.323506
	1.15	1.19819	0.165102	0.330204
	1.2	1.28242	0.197352	0.197352
				0.164731
2	1.2	1.282049	0.197238	0.197238
	1.25	1.38067	0.238281	0.476561
	1.25	1.40119	0.245417	0.490833
	1.3	1.52747	0.30331	0.30331
				0.244657
3	1.3	1.526706	0.303008	0.303008

Να λυθεί η $y' = y - x$ με αρχικη συνθηκη $y(0) = 2$, στο διάστημα [0,1] με τη μέθοδο Runge – Kutta 4ης τάξης και με h=0.1.

1

$$f(x,y) = y - x$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = 0.1(y - x)$$

$$K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) = 0.1\left[\left(y_n + \frac{K_1}{2}\right) - (x_n + 0.05)\right]$$

$$K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) = 0.1\left[\left(y_n + \frac{K_2}{2}\right) - (x_n + 0.05)\right]$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) = 0.1\left[\left(y_n + \frac{K_3}{2}\right) - (x_n + 0.1)\right]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = y_n + \Delta yn$$

n	x	y	K=h f(x,y)	Δy
0	**0**	**2**	=0.1*(C4-B4)	=D4
	=B4+0.05	=C4+D4/2	=0.1*(C5-B5)	=2*D5
	=B5	=C4+D5/2	=0.1*(C6-B6)	=2*D6
	=B6+0.05	=C4+D6	=0.1*(C7-B7)	=D7
				=SUM(E4:E7)/6
=A4+1	=B4+0.1	=C4+E8	=0.1*(C9-B9)	=D9
	=B9+0.05	=C9+D9/2	=0.1*(C10-B10)	=2*D10
	=B10	=C9+D10/2	=0.1*(C11-B11)	=2*D11
	=B11+0.05	=C9+D11	=0.1*(C12-B12)	=D12
				=SUM(E9:E12)/6
=A9+1	=B9+0.1	=C9+E13	=0.1*(C14-B14)	=D14
	=B14+0.05	=C14+D14/2	=0.1*(C15-B15)	=2*D15
	=B15	=C14+D15/2	=0.1*(C16-B16)	=2*D16
	=B16+0.05	=C14+D16	=0.1*(C17-B17)	=D17
				=SUM(E14:E17)/6

τα x αυξάνονται κατά 0.1 ανά προσέγγιση, και κατά 0.05, 0.05 και 0.1 στην ίδια προσέγγιση

τα y ξεκινούν από y+Δy στην αρχή κάθε προσέγγισης, και κατά το μισό κάθε προηγούμενου K στην συνέχεια της προσέγγισης

$$\frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = \Delta y$$

Να λυθεί η $y' = y - x$ με αρχικη συνθηκη $y(0) = 2$, στο διάστημα [0,1] με τη μέθοδο Runge – Kutta 4ης τάξης και με h=0.1.

2

n	x	y	K=h f(x,y)	Δy
0	0	2	0.2	0.2
	0.05	2.10000	0.205	0.41
	0.05	2.10250	0.20525	0.4105
	0.1	2.20525	0.210525	0.210525
				0.205171
1	0.1	2.205171	0.210517	0.210517
	0.15	2.31043	0.216043	0.432086
	0.15	2.31319	0.216319	0.432638
	0.2	2.42149	0.222149	0.222149
			0	0.216232
2	0.2	2.421403	0.22214	0.22214
	0.25	2.53247	0.228247	0.456495
	0.25	2.53553	0.228553	0.457105
	0.3	2.64996	0.234996	0.234996
			0	0.228456
3	0.3	2.649858	0.234986	0.234986
	0.35	2.76735	0.241735	0.48347
	0.35	2.77073	0.242073	0.484145
	0.4	2.89193	0.249193	0.249193
			0	0.241966
4	0.4	2.891824	0.249182	0.249182
	0.45	3.01642	0.256642	0.513283
	0.45	3.02015	0.257015	0.514029
	0.5	3.14884	0.264884	0.264884
				0.256896
5	0.5	3.148721	0.264872	0.264872
	0.55	3.28116	0.273116	0.546231
	0.55	3.28528	0.273528	0.547056
	0.6	3.42225	0.282225	0.282225
			0	0.273397
6	0.6	3.422118	0.282212	0.282212
	0.65	3.56322	0.291322	0.582645
	0.65	3.56778	0.291778	0.583556
	0.7	3.71390	0.30139	0.30139
			0	0.291634
7	0.7	3.713752	0.301375	0.301375
	0.75	3.86444	0.311444	0.622888
	0.75	3.86947	0.311947	0.623895
	0.8	4.02570	0.32257	0.32257
			0	0.311788
8	0.8	4.02554	0.322554	0.322554
	0.85	4.18682	0.333682	0.667363
	0.85	4.19238	0.334238	0.668476
	0.9	4.35978	0.345978	0.345978
			0	0.334062
9	0.9	4.359601	0.34596	0.34596
	0.95	4.53258	0.358258	0.716516
	0.95	4.53873	0.358873	0.717746
	1	4.71847	0.371847	0.371847
			0	0.358678
10	1	4.7183	0.371828	0.371828

Κριτήριο ευστάθειας:

Για την γραμμικοποιημένη εξίσωση $\frac{df}{dy} = \lambda y$

Τα κριτήρια είναι αντίστοιχα:

$$RK2: \quad -2 < h\lambda < 0$$

$$RK4: \quad -2.785 < h\lambda < 0$$

Παράδειγμα 6.7: Να βρεθεί το κριτήριο ευστάθειας της ΣΔΕ:

$$y' = x - y$$

με αρχική συνθήκη $y(0) = 5$ που θέλουμε να επιλύσουμε στο διάστημα $[0, 10]$ με τη μέθοδο $RK4$.

Λύση

Η εξίσωση είναι γραμμικοποιημένη και σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω έχουμε:

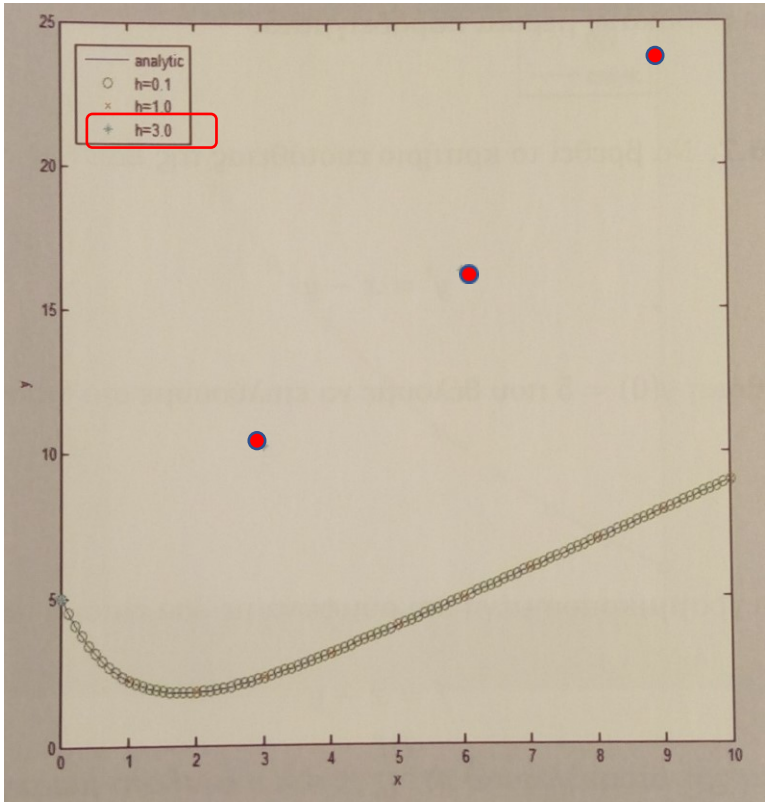
$$f = x - y$$

$$\lambda = \frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

Αφού για $RK4$ το κριτήριο ευστάθειας είναι:

$$-2.785 < h\lambda < 0 \Rightarrow -2.875 < h(-1) \Rightarrow h < 2.875$$

Δοκιμάζουμε παρακάτω με βήματα $h = 0.1, 1, 3$ και κάνουμε τη γραφική παράσταση που φαίνεται στο Σχήμα 6.12. Παρατηρούμε ότι για τιμές του βήματος μικρότερες από τον περιορισμό οι λύσεις είναι πολύ κοντά στην αναλυτική λύση. Μόλις ξεπεράσουμε την τιμή αυτή του ορίου οι λύσεις όχι απλώς δεν συμφωνούν αλλά αποκλίνουν σημαντικά (περίπτωση $h = 3$).



Από: Σαρρής και Καρακασίδης, «Αριθμητικές Μέθοδοι και εφαρμογές για Μηχανικούς, 2015

Ασκηση: $y' = -y + x + 2 \quad y(0) = 2 \quad y(1) = ? \quad h = 0.1$

Runge Kutta 2ης και 4ης, καθώς και σύγκριση των δύο μεθόδων

$$y = e^{-x} + x + 1$$

$$y(1) = 2.367879$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = h(-y + x + 2)$$

$$K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) = h(x + h - y - K_1 + 2)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

RK2

n	x	y	K1	xn+h	K2	y(n+1)	πρ.σχ.σφ.
0	0	2	=B$1*(2+B4-C4)	=B4+B$1	=B$1*(B4+B$1-C4-D4+2)	=C4+0.5*(F4+D4)	=(2.367879-G4)/2.367879
1	=B4+B$1	=G4	=B$1*(2+B5-C5)	=B5+B$1	=B$1*(B5+B$1-C5-D5+2)	=C5+0.5*(F5+D5)	=(2.367879-G5)/2.367879
2	=B5+B$1	=G5	=B$1*(2+B6-C6)	=B6+B$1	=B$1*(B6+B$1-C6-D6+2)	=C6+0.5*(F6+D6)	=(2.367879-G6)/2.367879
3	=B6+B$1	=G6	=B$1*(2+B7-C7)	=B7+B$1	=B$1*(B7+B$1-C7-D7+2)	=C7+0.5*(F7+D7)	=(2.367879-G7)/2.367879
4	=B7+B$1	=G7	=B$1*(2+B8-C8)	=B8+B$1	=B$1*(B8+B$1-C8-D8+2)	=C8+0.5*(F8+D8)	=(2.367879-G8)/2.367879
5	=B8+B$1	=G8	=B$1*(2+B9-C9)	=B9+B$1	=B$1*(B9+B$1-C9-D9+2)	=C9+0.5*(F9+D9)	=(2.367879-G9)/2.367879
6	=B9+B$1	=G9	=B$1*(2+B10-C10)	=B10+B$1	=B$1*(B10+B$1-C10-D10+2)	=C10+0.5*(F10+D10)	=(2.367879-G10)/2.367879
7	=B10+B$1	=G10	=B$1*(2+B11-C11)	=B11+B$1	=B$1*(B11+B$1-C11-D11+2)	=C11+0.5*(F11+D11)	=(2.367879-G11)/2.367879
8	=B11+B$1	=G11	=B$1*(2+B12-C12)	=B12+B$1	=B$1*(B12+B$1-C12-D12+2)	=C12+0.5*(F12+D12)	=(2.367879-G12)/2.367879
9	=B12+B$1	=G12	=B$1*(2+B13-C13)	=B13+B$1	=B$1*(B13+B$1-C13-D13+2)	=C13+0.5*(F13+D13)	=(2.367879-G13)/2.367879
10	=B13+B$1	=G13					

Ασκηση: $y' = -y + x + 2 \quad y(0) = 2 \quad y(1) = ? \quad h = 0.1$

Runge Kutta 2ης και 4ης, καθώς και σύγκριση των δύο μεθόδων

$$y = e^{-x} + x + 1$$

$$y(1) = 2.367879$$

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = h(-y + x + 2)$$

$$K_2 = hf(x_n + h, y_n + K_1) = h(x + h - y - K_1 + 2)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$$

RK2

n	x	y	K1	xn+h	K2	y(n+1)	πρ.σχ.σφ.
0	0	2	0	0.1	0.01	2.005	0.15325
1	0.1	2.005000	0.0095	0.2	0.01855	2.019025	0.14733
2	0.2	2.019025	0.0180975	0.3	0.02628775	2.041218	0.13796
3	0.3	2.041218	0.025878238	0.4	0.033290414	2.070802	0.12546
4	0.4	2.070802	0.032919805	0.5	0.039627824	2.107076	0.11014
5	0.5	2.107076	0.039292423	0.6	0.045363181	2.149404	0.09227
6	0.6	2.149404	0.045059643	0.7	0.050553679	2.19721	0.07208
7	0.7	2.197210	0.050278977	0.8	0.055251079	2.249975	0.04979
8	0.8	2.249975	0.055002474	0.9	0.059502227	2.307228	0.02561
9	0.9	2.307228	0.059277239	1	0.063349515	2.368541	-0.00028
10	1	2.368541					

Ασκηση: $y' = -y + x + 2 \quad y(0) = 2 \quad y(1) = ? \quad h = 0.1$

Runge Kutta 2ης και 4ης, καθώς και σύγκριση των δύο μεθόδων

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = h(-y + x + 2)$$

$$K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) = h\left(x + \frac{h}{2} - y - \frac{K_1}{2} + 2\right)$$

$$K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) = h\left(x + \frac{h}{2} - y - \frac{K_2}{2} + 2\right)$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) = h(x + h - y - K_3 + 2)$$

$$y = e^{-x} + x + 1$$

$$y(1) = 2.367879$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

RK4

n	x	y	K1	K2	K3	K4	
0	0	2	=B$1*(2+B4-C4)	=B$1*(B4-C4+2+B$1/2-D4/2)	=B$1*(B4+B$1/2-C4-E4/2+2)	=B$1*(B4+B$1-C4-F4+2)	=
1	=B4+B$1	=H4	=B$1*(2+B5-C5)	=B$1*(B5-C5+2+B$1/2-D5/2)	=B$1*(B5+B$1/2-C5-E5/2+2)	=B$1*(B5+B$1-C5-F5+2)	=
2	=B5+B$1	=H5	=B$1*(2+B6-C6)	=B$1*(B6-C6+2+B$1/2-D6/2)	=B$1*(B6+B$1/2-C6-E6/2+2)	=B$1*(B6+B$1-C6-F6+2)	=
3	=B6+B$1	=H6	=B$1*(2+B7-C7)	=B$1*(B7-C7+2+B$1/2-D7/2)	=B$1*(B7+B$1/2-C7-E7/2+2)	=B$1*(B7+B$1-C7-F7+2)	=
4	=B7+B$1	=H7	=B$1*(2+B8-C8)	=B$1*(B8-C8+2+B$1/2-D8/2)	=B$1*(B8+B$1/2-C8-E8/2+2)	=B$1*(B8+B$1-C8-F8+2)	=
5	=B8+B$1	=H8	=B$1*(2+B9-C9)	=B$1*(B9-C9+2+B$1/2-D9/2)	=B$1*(B9+B$1/2-C9-E9/2+2)	=B$1*(B9+B$1-C9-F9+2)	=
6	=B9+B$1	=H9	=B$1*(2+B10-C10)	=B$1*(B10-C10+2+B$1/2-D10/2)	=B$1*(B10+B$1/2-C10-E10/2+2)	=B$1*(B10+B$1-C10-F10+2)	=
7	=B10+B$1	=H10	=B$1*(2+B11-C11)	=B$1*(B11-C11+2+B$1/2-D11/2)	=B$1*(B11+B$1/2-C11-E11/2+2)	=B$1*(B11+B$1-C11-F11+2)	=
8	=B11+B$1	=H11	=B$1*(2+B12-C12)	=B$1*(B12-C12+2+B$1/2-D12/2)	=B$1*(B12+B$1/2-C12-E12/2+2)	=B$1*(B12+B$1-C12-F12+2)	=
9	=B12+B$1	=H12	=B$1*(2+B13-C13)	=B$1*(B13-C13+2+B$1/2-D13/2)	=B$1*(B13+B$1/2-C13-E13/2+2)	=B$1*(B13+B$1-C13-F13+2)	=
10	=B13+B$1	=H13					

Ασκηση: $y' = -y + x + 2 \quad y(0) = 2 \quad y(1) = ? \quad h = 0.1$

Runge Kutta 2ης και 4ης, καθώς και σύγκριση των δύο μεθόδων

$$K_1 = hf(x_n, y_n) = h(-y + x + 2)$$

$$K_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_1}{2}\right) = h\left(x + \frac{h}{2} - y - \frac{K_1}{2} + 2\right)$$

$$K_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{K_2}{2}\right) = h\left(x + \frac{h}{2} - y - \frac{K_2}{2} + 2\right)$$

$$K_4 = hf(x_n + h, y_n + K_3) = h(x + h - y - K_3 + 2)$$

$$y = e^{-x} + x + 1$$

$$y(1) = 2.367879$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

RK4

n	x	y	K1	K2	K3	K4	y(n+1)	πρ.σχ.σφ.
0	0	2	0	0.005	0.00475	0.00953	2.004838	0.15332
1	0.1	2.004838	0.00952	0.01404	0.01381	0.01813	2.018731	0.14745
2	0.2	2.018731	0.01813	0.02222	0.02202	0.02593	2.040818	0.13812
3	0.3	2.040818	0.02592	0.02962	0.02944	0.03297	2.070320	0.12566
4	0.4	2.070320	0.03297	0.03632	0.03615	0.03935	2.106531	0.11037
5	0.5	2.106531	0.03935	0.04238	0.04223	0.04512	2.148812	0.09252
6	0.6	2.148812	0.04512	0.04786	0.04773	0.05035	2.196586	0.07234
7	0.7	2.196586	0.05034	0.05282	0.0527	0.05507	2.249329	0.05007
8	0.8	2.249329	0.05507	0.05731	0.0572	0.05935	2.306570	0.02589
9	0.9	2.306570	0.05934	0.06138	0.06127	0.06322	2.367880	0.00000
10	1	2.367880						

Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων

Κεφαλαιο 7

- Μέθοδος Euler
- Μέθοδοι Runge – Kutta
- Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
- Μέθοδος (σχήμα) Crank - Nicolson

Μέθοδοι πεπερασμένων διαφορών

Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με οριακές συνθήκες, που δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά.
Οι παράγωγοι σε κάποιο σημείο προσεγγίζονται από πηλίκα διαφορών, πχ. η du/dx προσεγγίζεται από το Δu/Δx, με μικρό Δx.
Αν η u(x) και οι παράγωγοί της είναι συνεχείς και μονότιμες, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Taylor:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) + \frac{1}{6}h^3u'''(\mathrm{x}) + \ldots$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) - \frac{1}{6}h^3u'''(\mathrm{x}) + \ldots$$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + \cdots$

$$u''(x) = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=x} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Η δεύτερη παράγωγος εκφρασμένη ως προς γειτονικές τιμές της μεταβλητής

Αφαιρώντας κατά μέλη:

$$u'(x) = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

Η πρώτη παράγωγος εκφρασμένη ως προς γειτονικές τιμές της μεταβλητής

Προσεγγίζεται η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο P, από την κλίση της χορδής AB, και έχουμε προσέγγιση κεντρικής διαφοράς

Υπολογιστικά σχήματα πεπερασμένων διαφορών

Σχήμα κεντρικής διαφοράς (central difference)

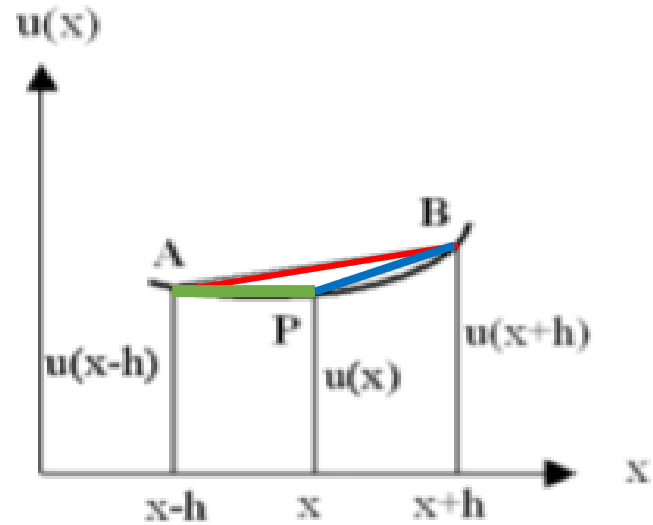
$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

σχήμα forward difference

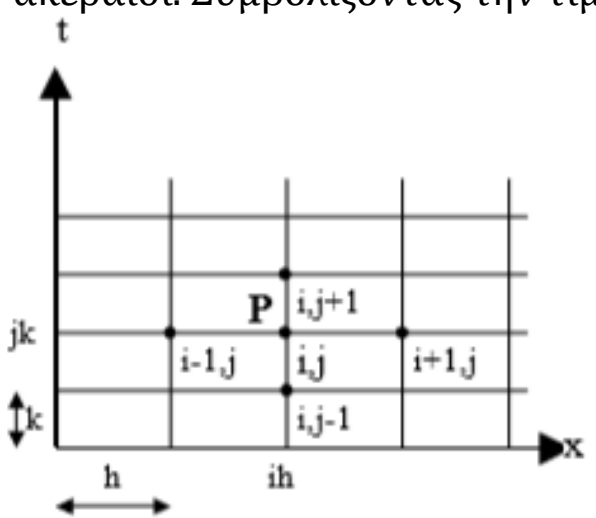
$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

σχήμα backward difference

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$



Υποθέτοντας ότι η u είναι συνάρτηση των x και t, και χωρίζοντας το επίπεδο x-t σε ορθογώνια διαστάσεων Δx=h και Δt=k : Οι συντεταγμένες του σημείου P είναι x=ih και t=jk, όπου i και j ακέραιοι. Συμβολίζοντας την τιμή της u στο P με $u_P = u(ih,jk) = u_{i,j}$, θα έχουμε:



$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

Ενώ χρησιμοποιώντας το σχήμα forward difference θα έχουμε την παράγωγο της u ως προς t στο σημείο P:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

Άσκηση.

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση παραβολικού τύπου

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Απλοποιημένη εξίσωση διάχυσης (ο δεύτερος νόμος του Fick) η μεταβολή της συγκέντρωσης ως προς τον χρόνο, λόγω της διάχυσης κατά τη διάρκεια της επαφής δύο αναμίξιμων υγρών

με τις συνθήκες :

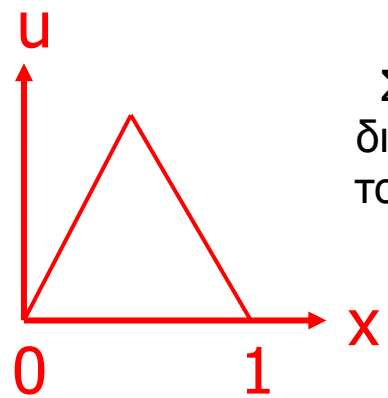
α) <u>Οριακές συνθήκες</u>

u = 0 όταν x = 0 και x = 1, για κάθε τιμή του t.

β) <u>Αρχική συνθήκη (t = 0)</u>

$u = 2x$ για $0 \le x \le 1/2$

$u = 2(1-x)$ για $1/2 \le x \le 1$.



Στα άκρα (0 και 1), το u είναι 0 διαρκώς. Την χρονική στιγμή t=0, το u έχει την παρακάτω κατανομή ως προς x

Λύση

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (7.16) και (7.17), η παραπάνω διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφτεί

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

όπου $x = ih$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ Χωρικά βήματα

και $t = jk$, $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Χρονικά βήματα

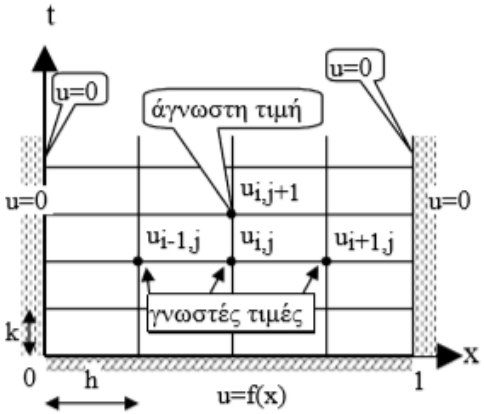
Η σχέση (F1) μπορεί να γραφτεί

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \qquad \text{(F2)}$$

όπου $r = \dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \dfrac{k}{h^2}$, Ο λόγος του χρονικού βήματος προς το τετράγωνο του χωρικού

και δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού της άγνωστης τιμής $u_{i,j+1}$ στον κόμβο $(i, j+1)$ με βάση τις γνωστές τιμές στο προηγούμενο j βήμα του χρόνου.

Υπολογίζονται λοιπόν οι άγνωστες τιμές u του 1ου βήματος του χρόνου $(t = k)$, με βάση τις γνωστές οριακές και αρχικές τιμές για $t = 0$. Κατόπιν, υπολογίζονται οι άγνωστες τιμές του 2ου βήματος του χρόνου, με βάση τις ήδη υπολογισμένες τιμές του πρώτου, κλπ.



Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι όπως φαίνεται συμμετρικό ως προς $x = 1/2$.

Αν ληφθεί $\Delta x = h = 1/10$, $\Delta t = k = 1/1000$, έχουμε

$$r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{k}{h^2} = \frac{1}{10}$$

και η σχέση (F2) γίνεται

$$u_{i,j+1} = 1/10(u_{i-1,j} + 8u_{i,j} + u_{i+1,j}) .$$

Έτσι υπολογίζονται τελικά οι τιμές της u σε κάθε κόμβο, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Για παράδειγμα,

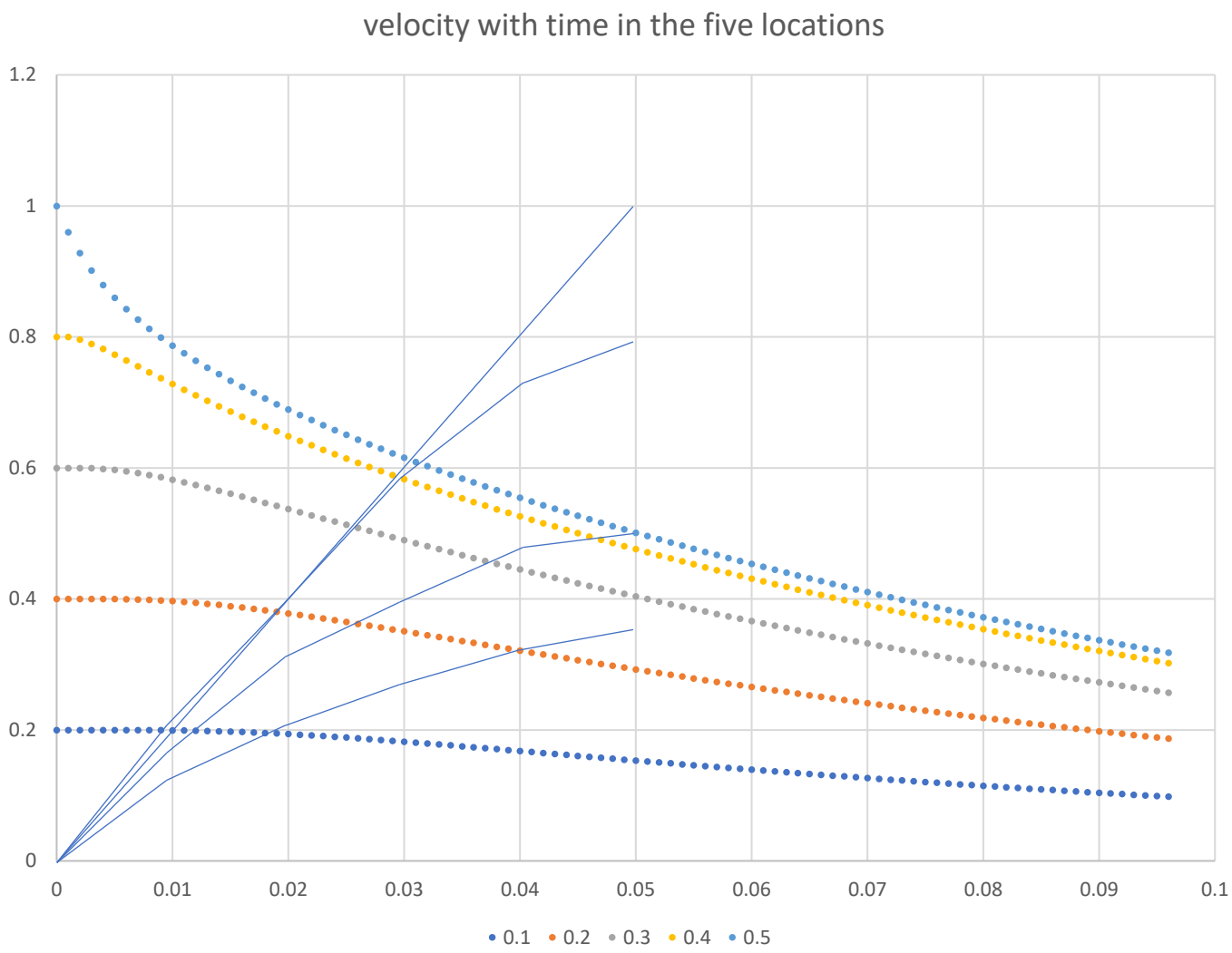
$u_{5,1} = 1/10[0.8 + (8 * 1) + 0.8] = 0.9600$

$u_{4,2} = 1/10[0.6 + (8 * 0.8) + 0.96] = 0.7960.$

		i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	i=7	i=8	i=9	i=10
j	t	x=0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0
1	0.001	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.96	0.8	0.6	0.4	0.2	0
2	0.002	0	0.2	0.4	0.6	0.796	0.928	0.796	0.6	0.4	0.2	0
3	0.003	0	0.2	0.4	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896	0.5996	0.4	0.2	0
4	0.004	0	0.2	0.4	0.5986	0.7818	0.8792	0.7818	0.5986	0.4	0.2	0
5	0.005	0	0.2	0.3998	0.5971	0.7732	0.8597	0.7732	0.5971	0.3998	0.2	0
6	0.006	0	0.19998	0.3996	0.595	0.7643	0.8424	0.7643	0.595	0.3996	0.2	0
7	0.007	0	0.19994	0.3992	0.5924	0.7551	0.8268	0.7551	0.5924	0.3992	0.1999	0
8	0.008	0	0.19987	0.3986	0.5893	0.746	0.8125	0.746	0.5893	0.3986	0.1999	0
9	0.009	0	0.19975	0.3978	0.5859	0.737	0.7992	0.737	0.5859	0.3978	0.1998	0
10	0.01	0	0.19958	0.3968	0.5822	0.7281	0.7867	0.7281	0.5822	0.3968	0.1996	0
11	0.011	0	0.19934	0.3956	0.5783	0.7194	0.775	0.7194	0.5783	0.3956	0.1993	0
12	0.012	0	0.19903	0.3942	0.5741	0.7108	0.7639	0.7108	0.5741	0.3942	0.199	0
13	0.013	0	0.19865	0.3927	0.5698	0.7025	0.7533	0.7025	0.5698	0.3927	0.1986	0
14	0.014	0	0.19819	0.391	0.5653	0.6943	0.7431	0.6943	0.5653	0.391	0.1982	0
15	0.015	0	0.19765	0.3892	0.5608	0.6863	0.7333	0.6863	0.5608	0.3892	0.1977	0
16	0.016	0	0.19704	0.3872	0.5562	0.6784	0.7239	0.6784	0.5562	0.3872	0.197	0
17	0.017	0	0.19635	0.3851	0.5515	0.6708	0.7148	0.6708	0.5515	0.3851	0.1963	0
18	0.018	0	0.19558	0.3828	0.5468	0.6632	0.706	0.6632	0.5468	0.3828	0.1956	0
19	0.019	0	0.19475	0.3805	0.542	0.6559	0.6975	0.6559	0.542	0.3805	0.1948	0
20	0.02	0	0.19385	0.3781	0.5373	0.6487	0.6891	0.6487	0.5373	0.3781	0.1939	0
21	0.021	0	0.19289	0.3756	0.5325	0.6416	0.681	0.6416	0.5325	0.3756	0.1929	0
22	0.022	0	0.19187	0.373	0.5277	0.6346	0.6731	0.6346	0.5277	0.373	0.1919	0
23	0.023	0	0.1908	0.3704	0.5229	0.6278	0.6654	0.6278	0.5229	0.3704	0.1908	0
24	0.024	0	0.18967	0.3677	0.5182	0.6211	0.6579	0.6211	0.5182	0.3677	0.1897	0
25	0.025	0	0.1885	0.3649	0.5134	0.6144	0.6505	0.6144	0.5134	0.3649	0.1885	0
26	0.026	0	0.18729	0.3621	0.5087	0.608	0.6433	0.608	0.5087	0.3621	0.1873	0
27	0.027	0	0.18605	0.3593	0.5039	0.6016	0.6362	0.6016	0.5039	0.3593	0.186	0
28	0.028	0	0.18477	0.3564	0.4992	0.5953	0.6293	0.5953	0.4992	0.3564	0.1848	0
29	0.029	0	0.18346	0.3535	0.4946	0.5891	0.6225	0.5891	0.4946	0.3535	0.1835	0
30	0.03	0	0.18212	0.3506	0.4899	0.583	0.6158	0.583	0.4899	0.3506	0.1821	0

Χρονικά βήματα

Οι τιμές της u σε συνάρτηση με το t για τις πέντε θέσεις



Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων

Κεφαλαιο 7

- Μέθοδος Euler
- Μέθοδοι Runge – Kutta
- Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών
- Μέθοδος (σχήμα) Crank - Nicolson

Η επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης με την μέθοδο που περιγράφτηκε είναι απλή, αλλά η ακρίβειά της εξαρτιέται από τη τιμή του λόγου r. Έχει αποδειχτεί ότι δίνει ικανοποιητική ακρίβεια για τιμές του r, $0 < r \leq 0.5$, δηλαδή για πολύ μικρές τιμές του dx.

Οι Crank και Nicolson πρότειναν την αντικατάσταση της παραγώγου $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ από την μέση τιμή της πεπερασμένης διαφοράς στο (j + 1) και j βήμα του χρόνου. Έτσι η διαφορική εξίσωση (F0) γίνεται

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2}\left\{\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}\right\} \qquad (7.18)$$

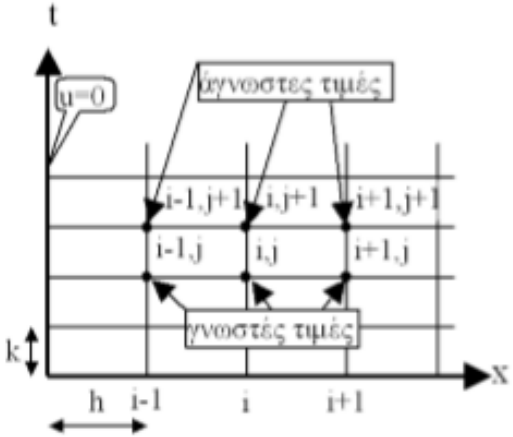
η οποία μπορεί να γραφτεί τελικά

$$-ru_{i-1,j+1} + (2 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2 - 2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j}\,, \qquad (7.19)$$

όπου $r = k/h^2$.

Η σχέση (F3) περιέχει όπως φαίνεται στο αριστερό μέλος τρεις άγνωστες και στο δεξιό μέλος τρεις γνωστές τιμές της u. Αν υπάρχουν N εσωτερικοί κόμβοι σε κάθε βήμα του χρόνου, τότε για j = 0 και i = 1, 2, 3, . . ., N η (F3) δίνει ένα σύστημα N εξισώσεων για τις N άγνωστες τιμές του 1ου βήματος του χρόνου, συναρτήσει των γνωστών αρχικών και οριακών τιμών. Ομοίως, για j = 1 οι N άγνωστες τιμές της u εκφράζονται συναρτήσει των υπολογισμένων κατά το προηγούμενο βήμα τιμών της u, κτλ.

Ένα αριθμητικό σχήμα της μορφής που περιγράφηκε, κατά την οποία οι άγνωστες τιμές προκύπτουν από την



επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων ονομάζεται **έμμεσο (implicit).**

Το μητρώο των συντελεστών των αγνώστων που προκύπτει είναι τριδιαγωνικό και επιλύεται με μία από τις μεθόδους που έχουν ήδη αναφερθεί.

Η άσκηση που λύθηκε προηγουμένως, για $\Delta x = h = 1/10$ και $\Delta t = k = 1/100$ οδηγεί τη σχέση (F3) στη μορφή

$$- u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j}. \qquad \text{(F4).}$$

Κατά το πρώτο βήμα του χρόνου ($j = 0$) το σύστημα των εξισώσεων (όπως διαμορφώνεται και με βάση τις αρχικές και οριακές συνθήκες) είναι:

$$\begin{aligned}
- 0 + 4u_1 - u_2 &= 0 + 0.4,\\
- u_1 + 4u_2 - u_3 &= 0.2 + 0.6,\\
- u_2 + 4u_3 - u_4 &= 0.4 + 0.8,\\
- u_3 + 4u_4 - u_5 &= 0.6 + 1.0,\\
- 2u_4 + 4u_5 &= 0.8 + 0.8.
\end{aligned}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτουν οι τιμές της u κατά το 1ο βήμα του χρόνου ($t = 0.01$),

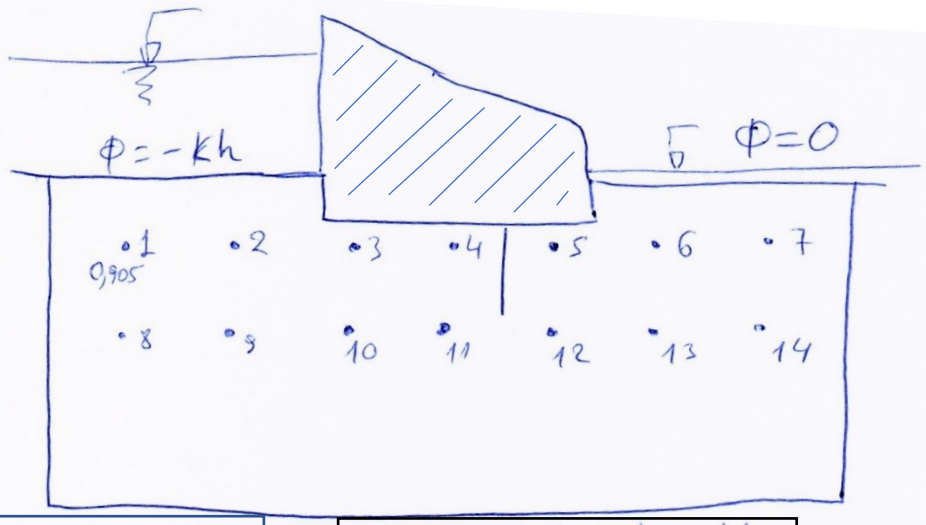
$$\begin{aligned}
u_1 &= 0.1989,\\
u_2 &= 0.3956,\\
u_3 &= 0.5834,\\
u_4 &= 0.7381,\\
u_5 &= 0.7691.
\end{aligned}$$

Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για το επόμενο βήμα ($j = 1$) κτλ.

Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών στις υπόγειες ροές: ροή κάτω από φράγμα

Τα 1 και 7 έχουν ΔΦ προς 3 σημεία. Το 3ο σημείο του 7 έχει Φ=0

Φ: δυναμικό



Χωρική μεταβολή, προσδιορίζεται από τις οριακές συνθήκες

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_2 + \Phi_8 - kh}{3}$$

$$\Phi_2 = \frac{\Phi_1 + \Phi_3 + \Phi_9 - kh}{4}$$

$$\Phi_3 = \frac{\Phi_2 + \Phi_4 + \Phi_{10} \cdot 1{,}33}{3{,}33}$$

Τα 4 και 5 έχουν ΔΦ προς 2 σημεία.

$$\Phi_4 = \frac{\Phi_3 + \Phi_{11}}{2} \qquad \Phi_5 = \frac{\Phi_{12} + \Phi_6}{2}$$

$$\Phi_6 = \frac{\Phi_5 + \Phi_7 + \Phi_{13}}{4}$$

$$\Phi_7 = \frac{\Phi_6 + \Phi_{14}}{3}$$

$$\Phi_8 = \frac{\Phi_1 + \Phi_9}{2}$$

Τα 8 και 14 έχουν ΔΦ προς 2 σημεία.

Τα 9 έως 13 έχουν ΔΦ προς 3 σημεία.

$$\Phi_9 = \frac{\Phi_8 + \Phi_2 + \Phi_{10}}{3} \qquad \Phi_{10} = \frac{\Phi_9 + \Phi_3 + \Phi_{11}}{3}$$

$$\Phi_{11} = \frac{\Phi_{10} + \Phi_4 + \Phi_{12}}{3}$$

$$\Phi_{12} = \frac{\Phi_{11} + \Phi_5 + \Phi_{13}}{3} \qquad \Phi_{13} = \frac{\Phi_{12} + \Phi_6 + \Phi_{14}}{3}$$

$$\Phi_{14} = \frac{\Phi_{13} + \Phi_7}{2}$$

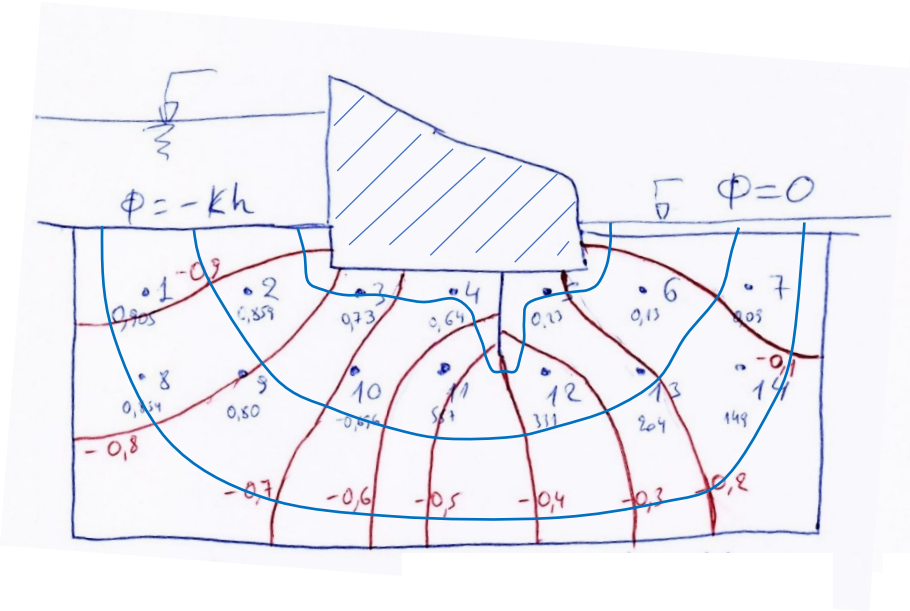
ITERATION	POINT NUMBER													
NUMBER	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
2	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-0.750	-0.583	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-0.917	-0.750
3	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-0.925	-0.606	-0.452	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-0.947	-0.768	-0.610
4	-1.000	-1.000	-1.000	-0.977	-0.854	-0.518	-0.376	-1.000	-1.000	-1.000	-0.975	-0.866	-0.665	-0.520
5	-1.000	-1.000	-0.993	-0.944	-0.785	-0.456	-0.326	-1.000	-1.000	-0.989	-0.933	-0.794	-0.590	-0.458
6	-1.000	-0.998	-0.978	-0.902	-0.725	-0.410	-0.289	-1.000	-0.996	-0.969	-0.888	-0.735	-0.534	-0.412
66	-0.882	-0.824	-0.652	-0.500	-0.348	-0.176	-0.118	-0.821	-0.761	-0.638	-0.500	-0.363	-0.239	-0.179
67	-0.882	-0.824	-0.652	-0.500	-0.348	-0.176	-0.118	-0.821	-0.761	-0.638	-0.500	-0.363	-0.239	-0.179
68	-0.882	-0.824	-0.652	-0.500	-0.348	-0.176	-0.118	-0.821	-0.761	-0.638	-0.500	-0.362	-0.239	-0.179
69	-0.882	-0.824	-0.652	-0.500	-0.348	-0.176	-0.118	-0.821	-0.761	-0.638	-0.500	-0.362	-0.239	-0.179

Η επίδραση της πασαλοσανίδας στις γραμμές ροής

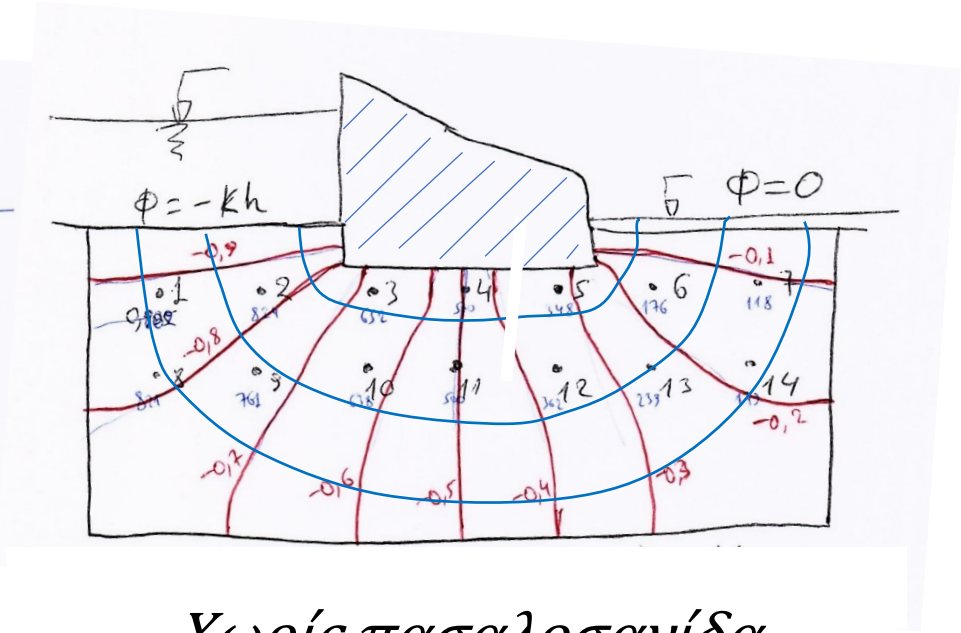
-0.904	-0.859	-0.729	-0.643	-0.231	-0.132	-0.094
-0.854	-0.803	-0.696	-0.557	-0.331	-0.204	-0.149
με πασαλοσανίδα						

-0.882	-0.824	-0.652	-0.500	-0.348	-0.176	-0.118
-0.821	-0.761	-0.638	-0.500	-0.362	-0.239	-0.179
χωρίς πασαλοσανίδα						

-0.023	-0.035	-0.077	-0.143	0.116	0.044	0.025
-0.032	-0.042	-0.058	-0.056	0.032	0.035	0.030
διαφορά (με-χωρίς) πασαλοσανίδα						



Με πασαλοσανίδα



Χωρίς πασαλοσανίδα

Ισοδυναμικές γραμμές

Γραμμές ροής

Ευχαριστώ για την προσοχή σας !