Αριθμητική ολοκλήρωση:

Στοιχειώδεις μέθοδοι
Ορθογωνικός κανόνας
Τραπεζοειδής κανόνας
Ο κανόνας του Simpson

Στοιχειώδεις μέθοδοι

Προσεγγιστικός υπολογισμός του: $\int_a^b f(x)dx$

αντικαθιστώντας την f(x) από ένα πολυώνυμο στο διάστημα [a,b].

Πολυώνυμο παρεμβολής κατά Newton:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1].(x - x_0) + \ldots$$

$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n].(x - x_0).(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) .$$

Το πολυώνυμο, μετά από επεξεργασία, και με τη βοήθεια τελεστή $\Delta^i f(x)$ γράφεται :

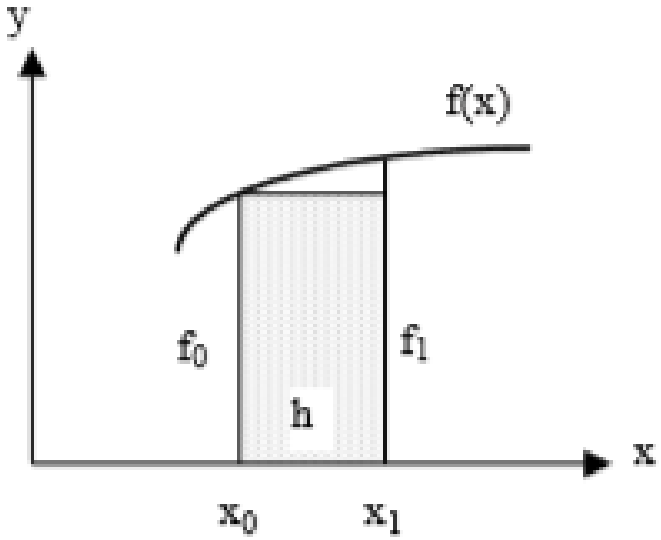
$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i f(x_0)}{i!h^i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) .$$

Για n=0, το πολυώνυμο οδηγεί στην μέθοδο του ορθογωνίου κανόνα ολοκλήρωσης, ενώ για n=1 στην μέθοδο του τραπεζίου. Και στις δύο μεθόδους, τα σημεία x_i ισαπέχουν μεταξύ τους.

Μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων x_i, πχ x_0 και x_1, η ολοκλήρωση δίνεται από τους παρακάτω τύπους, και παριστάνεται γραφικά από τα παρακάτω σχήματα:

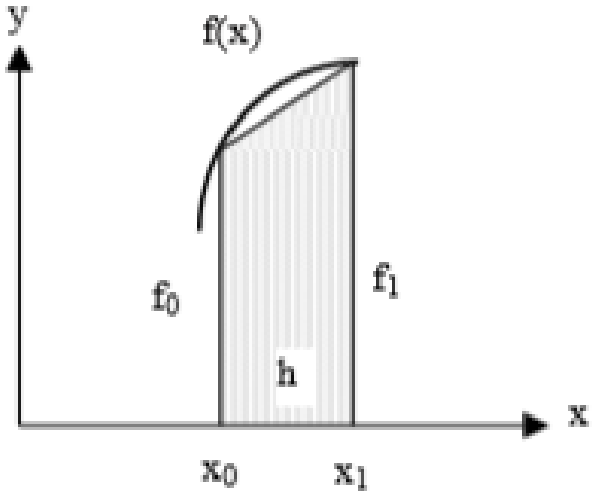
Η βάση του κανόνα ολοκλήρωσης του ορθογωνίου:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx h\int_0^1 f_0\,ds = h.f_0$$



Η βάση του κανόνα ολοκλήρωσης του τραπεζίου:

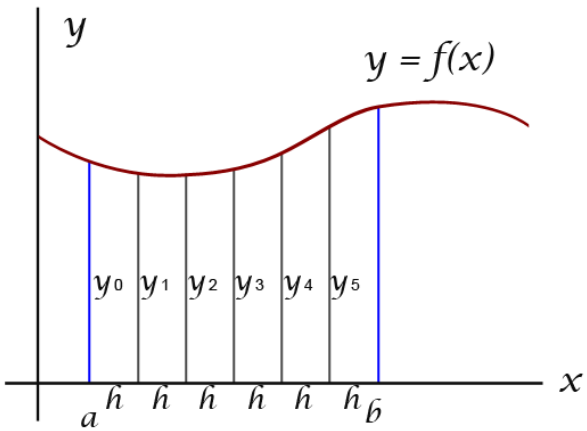
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx h\int_0^1 (f_0 + s.\Delta f_0)\,ds = \frac{h}{2}.(f_0 + f_1)\,.$$



Και στους δύο τύπους, το διάστημα χωρίζεται σε N υποδιαστήματα, μήκους h, και συμβολίζοντας τις τιμές $f(x_i)$ με f_i :

$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$\int_a^b f(x)dx$$



Ο ορθογώνιος τύπος:

$$R_N = h(f_0 + f_1 + \cdots + f_{N-1})$$

Το σφάλμα της ολοκλήρωσης με τον ορθογώνιο τύπο:

$$E_N^R = \frac{b-a}{2} h\, f'(\eta), \alpha < \eta < b$$

Ο τραπεζοειδής τύπος:

$$T_N = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2}\right)$$

το σφάλμα της ολοκλήρωσης με τον τραπεζοειδή τύπο

$$E_N^T = -\frac{b-a}{12} h^2\, f''(\eta), \alpha < \eta < b$$

Ο τραπεζοειδής προσεγγίζει γενικά καλύτερα την συνάρτηση:

$$h = \frac{b-a}{N}$$

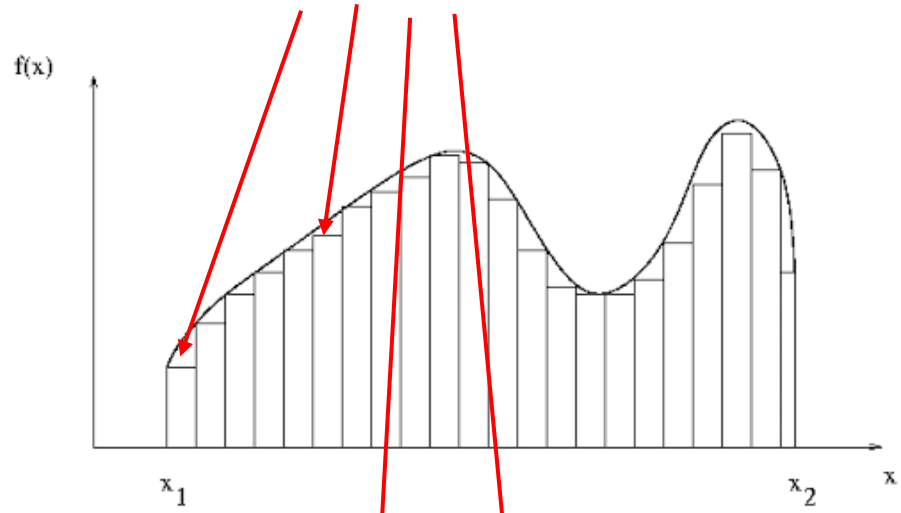
$$R_N = h(f_0 + f_1 + \cdots + f_{N-1})$$

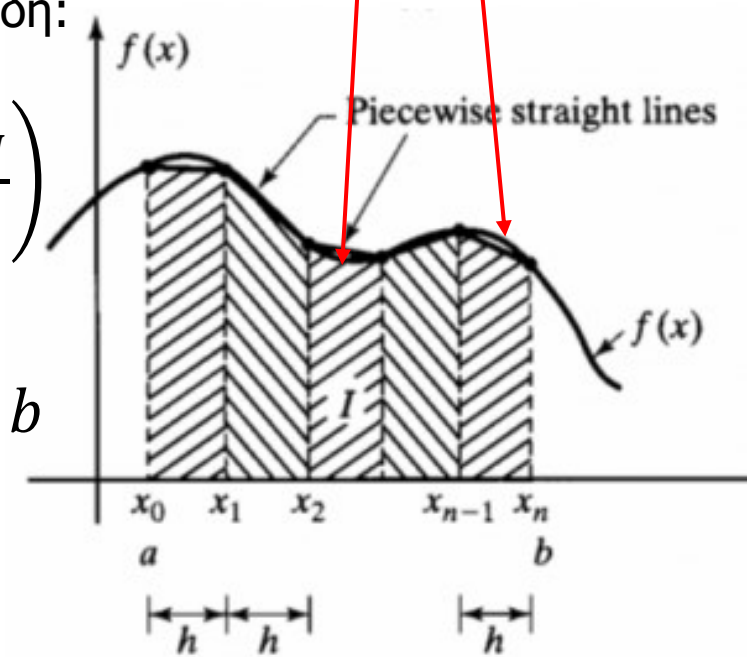
$$E_N^R = \frac{b-a}{2} h\, f'(\eta), \alpha < \eta < b$$

Το σφάλμα είναι μικρότερο στον τραπεζοειδή:

$$T_N = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2}\right)$$

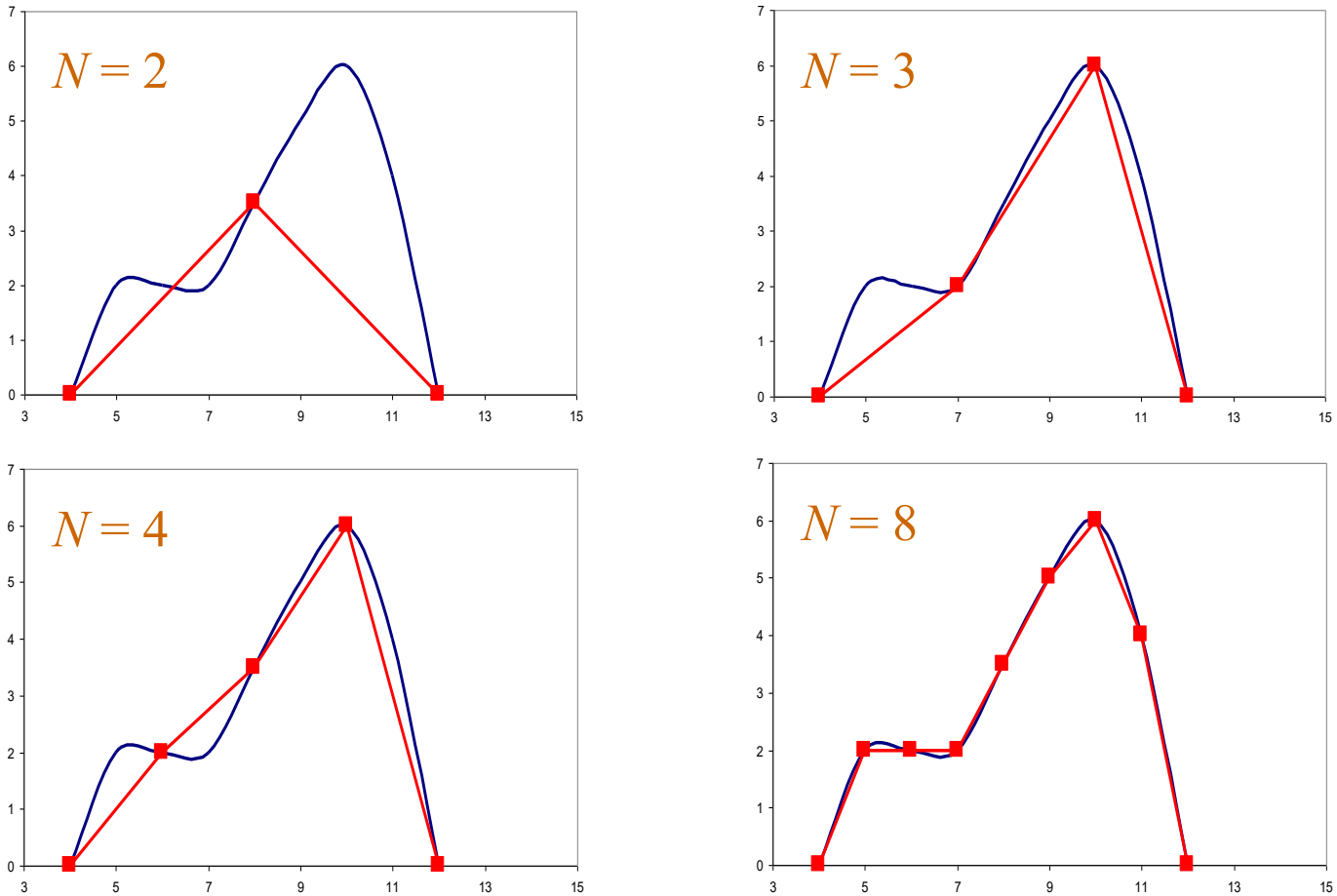
$$E_N^T = -\frac{b-a}{12} h^2\, f''(\eta), \alpha < \eta < b$$





Στην ίδια συνάρτηση, περισσότερα διαστήματα, καλύτερο αποτέλεσμα [σφάλμα ~ $O(h^2)$],

Εδώ: τραπεζοειδής κανόνας



Μέθοδος τραπεζίου, σφάλμα <10^{-6}. Αριθμός διαστημάτων N?

$$I = \int_0^1 \cos\frac{\pi x}{2}\,dx$$

$$E_N^T = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta), \alpha < \eta < b$$

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}sin\frac{\pi x}{2}$$

$$max(E_N^T) = \frac{1}{12}h^2 max\big(f''(x)\big) = \frac{1}{12}h^2\frac{\pi^2}{4} \le 10^{-6} \Rightarrow h \le 0.002205316$$

$$N \ge \frac{1}{h} \Rightarrow N \ge 453.45 \Rightarrow N = 454$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}cos\frac{\pi x}{2}$$

Για σφάλμα <10^{-3}: $\frac{1}{12}h^2\frac{\pi^2}{4} \le 10^{-3} \Rightarrow h \le 0.0697$

$$N \ge \frac{1}{h} \Rightarrow N \ge 14.34 \Rightarrow N = 15$$

Να γίνουν οι υπολογισμοί για N=15

Μέθοδος τραπεζίου, σφάλμα <10^{-6}. Αριθμός διαστημάτων N?

$$I = \int_0^1 \cos\frac{\pi x}{2}\,dx$$

$$E_N^T = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta), \alpha < \eta < b$$

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}sin\frac{\pi x}{2}$$

$$max(E_N^T) = \frac{1}{12}h^2 max\left(f''(x)\right) = \frac{1}{12}h^2\frac{\pi^2}{4} \le 10^{-6} \Rightarrow h \le 0.002205316$$

$$N \ge \frac{1}{h} \Rightarrow N \ge 453.45 \Rightarrow N = 454$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}cos\frac{\pi x}{2}$$

Για σφάλμα <10^{-3}: $\frac{1}{12}h^2\frac{\pi^2}{4} \le 10^{-3} \Rightarrow h \le 0.0697$

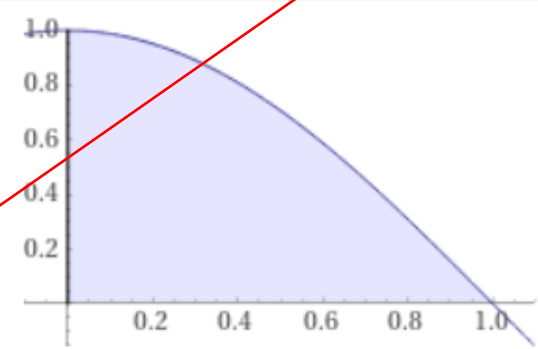
$$N \ge \frac{1}{h} \Rightarrow N \ge 14.34 \Rightarrow N = 15$$

$$T_N = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2}\right)$$

i	x	f(x)	coef	prod
0	0	1	0.5	0.5
1	0.067	0.99452	1	0.994521895
2	0.133	0.97815	1	0.978147601
3	0.2	0.95106	1	0.951056516
4	0.267	0.91355	1	0.913545458
5	0.333	0.86603	1	0.866025404
6	0.4	0.80902	1	0.809016994
7	0.467	0.74314	1	0.743144825
8	0.533	0.66913	1	0.669130606
9	0.6	0.58779	1	0.587785252
10	0.667	0.5	1	0.5
11	0.733	0.40674	1	0.406736643
12	0.8	0.30902	1	0.309016994
13	0.867	0.20791	1	0.207911691
14	0.933	0.10453	1	0.104528463
15	1	2.8E-16	0.5	1.41651E-16
				0.636038

$$\int_0^1 \cos(0.5\,\pi\,x)\,dx = 0.63662$$

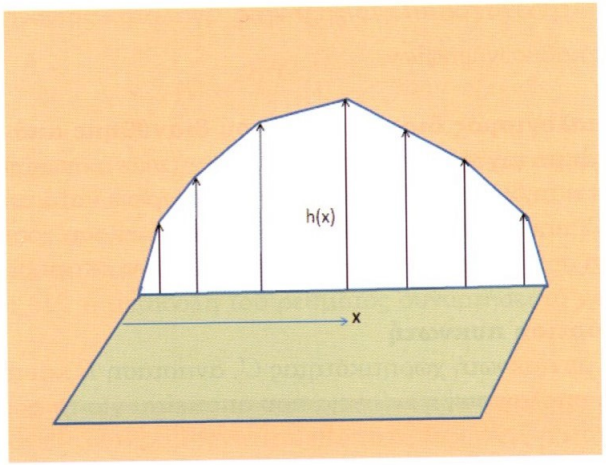
Visual representation of the integral:



Άσκηση 3.6) Διατομή τούνελ

Σε ένα τούνελ (Σχήμα 3.13) έχει καταγραφεί το ύψος h από το έδαφος συναρτήσει της απόστασης x από το αριστερό άκρο όπως φαίνεται στον πίνακα. Να υπολογιστεί η διατομή του τούνελ στο συγκεκριμένο σημείο.

x (m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h (m)	0	2.5	4.5	5.2	5.5	6	5.7	5	4.5	2.5	0.0



εδώ οι τιμές της συνάρτησης είναι μετρημένες

i	x	f(x)	coef	prod
0	0	0	0.5	0.00
1	1	2.5	1	2.50
2	2	4.5	1	4.50
3	3	5.2	1	5.20
4	4	5.5	1	5.50
5	5	6	1	6.00
6	6	5.7	1	5.70
7	7	5	1	5.00
8	8	4.5	1	4.50
9	9	2.5	1	2.50
10	10	0	0.5	0.50
				41.9

Παράδειγμα 3.7: Υπολογισμός διατομής ποταμού. Σε ένα ποτάμι έχει καταγραφεί το βάθος σε μια σειρά ισαπεχόντων σημείων (Σχήμα 3.9) ως εξής:

x(m)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
h(m)	0	5.5	7.1	7.5	8.3	9.0	8.5	7.2	6.0	5.0	0.0

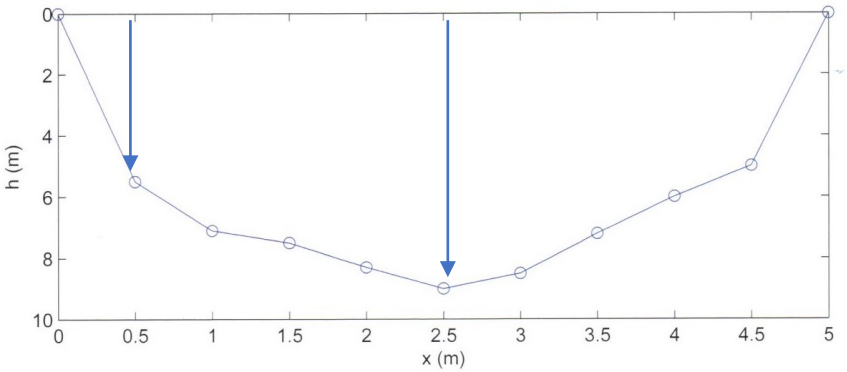
όπου x είναι η απόσταση από την μια όχθη και d είναι το βάθος στο αντίστοιχο σημείο μέτρησης. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της διατομής του ποταμού σε εκείνο το σημείο.

Λύση

Η διατομή Α δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$A = \int_0^5 h(x)dx$$

όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε οι μετρήσεις έχουν γίνει σε ισαπέχοντα σημεία με μήκος διαστήματος $h = 0.5$. Οπότε το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το σύνθετο κανόνα του τραπεζίου:



Σχήμα 3.9.: Καταγραφή βάθους σε μια διατομή ποταμού.

$$A = \frac{h}{2}\left[h(x_0) + h(x_{10}) + 2(h(x_1) + h(x_2) + h(x_3) + h(x_4) + \right.$$

$$\left. + h(x_5) + h(x_6) + h(x_7) + h(x_8) + h(x_9))\right] =$$

$$= \frac{0.5}{2}[0 + 0 + 2(5.5 + 7.1 + 7.5 + 8.3 + 9.0 + 8.5 + 7.2 + 6.0 + 5.0 + 0)] = 32.0500$$

$$T_N = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2}\right)$$

εδώ οι τιμές της συνάρτησης είναι έτοιμες, μετρημένες

Ο κανόνας του Simpson για n=2

Η προσέγγιση του πολυωνύμου παρεμβολής κατά Newton με τη βοήθεια του τελεστή, έδωσε για n=0 τον ορθογώνιο κανόνα ολοκλήρωσης, και για n=1 τον τραπεζοειδή. **Για n=2** δίνει τον κανόνα του Simpson, ή κανόνα του (1/3):

$$S_N = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \ldots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N)$$

Ο αριθμός των διαστημάτων, για να εφαρμοστεί ο κανόνας Simpson πρέπει να είναι άρτιος, και οι συντελεστές εναλλάσσονται ως εξής:

$$h = \frac{b-a}{N}$$

N	συντελεστές													άθρ. συν/στ.	άθρ./N
2	1	4	1											6	3
4	1	4	2	4	1									12	3
6	1	4	2	4	2	4	1							18	3
8	1	4	2	4	2	4	2	4	1					24	3
10	1	4	2	4	2	4	2	4	2	4	1			30	3
12	1	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2	4	1	36	3

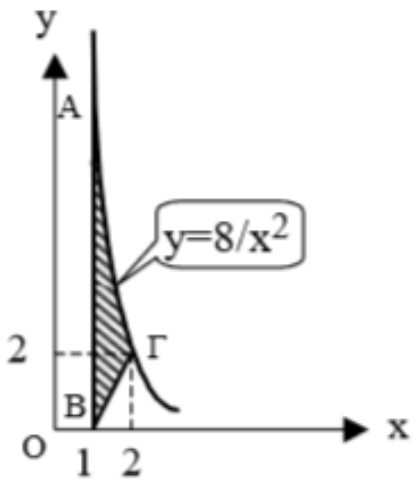
Το άθροισμα των συν/στών είναι 3N

Το σφάλμα είναι γενικά ακόμα μικρότερο και από αυτό του τραπεζοειδή:

$$E_N^S = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta), \alpha < \eta < b$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί με τη μέθοδο Simpson το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος ΑΒΓ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.



Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β, Γ έχει εξίσωση $y = 2(x - 1)$.

Επομένως το εμβαδόν ΑΒΓ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 [8/x^2 - 2(x-1)]\,dx\ .$$

Άρα,

$f'(x) = -16/x^3 - 2$

. . . . . .

. . . . . .

$f^{(4)}(x) = 960/x^6$, η οποία γίνεται μέγιστη για $x = 1$ συνάρτηση).

Άρα, $E_N^S = \frac{2-1}{180}.h^4.(960/x^6)\Big|_{x=1} < 5*10^{-3}$.

h=1/6

Επομένως $h < 0.175 \rightarrow N > 5.715$ και επιλέγεται $N = 6$

x	f(x)	
1	8.	* 1
7/6	5.54421	* 4
8/6	3.83333	* 2
9/6	2.55556	* 4
10/6	1.54667	* 2
11/6	0.71349	* 4
2	0.	* 1

Το εμβαδόν είναι λοιπόν

S = (1/18) . (8. + 4 * 5.54421 + 2 * 3.83333 + 4 * 2.55556 + 2 * 1.54667 + 4 * 0.71349 + 0.) = 3.0007.

Να βρεθεί η τιμή του παρακάτω ολοκληρώματος, με τις μεθόδους: ορθογωνικού κανόνα, τραπεζοειδούς κανόνα και κατά Simpson, με h=0.3, 0.2 και 0.1 (N=4). Επίσης, εάν η πραγματική τιμή του ολοκληρώματος είναι 3.009038, να βρεθούν το θεωρητικό και το πραγματικό σφάλμα για την μέθοδο του ορθογωνικού κανόνα. Δίνονται οι τιμές της συνάρτησης στις απαραίτητες τιμές του x:

$$f(x)=\int_2^{3.2} x\ lnx\ dx$$

x	f(x)
2	1.3863
2.3	1.9157
2.6	2.4843
2.9	3.0877
3.2	3.7221

Microsoft Excel Worksheet

ορθογωνιος	τραπεζοειδής	Simpson	
τιμή	τιμή	τιμή	
2.662192871	3.012561106	3.009044495	
θεωρητ. σφάλμα	θεωρητ. σφάλμα	θεωρητ. σφάλμα	
0.3042	-0.004509	1.34865E-05	h=0.3
απόλυτο σφάλμα	απόλυτο σφάλμα	απόλυτο σφάλμα	
0.346844914	-0.003523321	-6.70959E-06	
σχετικό σφάλμα	σχετικό σφάλμα	σχετικό σφάλμα	
0.115267716	-0.001170913	-2.22981E-06	

ορθογωνιος	τραπεζοειδής	Simpson	
τιμή	τιμή	τιμή	
2.777025303	3.010604126	3.009039126	
θεωρητ. σφάλμα	θεωρητ. σφάλμα	θεωρητ. σφάλμα	
0.2028	-0.002004	0.000002664	h=0.2
απόλυτο σφάλμα	απόλυτο σφάλμα	απόλυτο σφάλμα	
0.232012482	-0.001566341	-1.34102E-06	
σχετικό σφάλμα	σχετικό σφάλμα	σχετικό σφάλμα	
0.077105207	-0.000520545	-4.45663E-07	

ορθογωνιος	τραπεζοειδής	Simpson	
τιμή	τιμή	τιμή	
2.892640022	3.009429434	3.00903787	
θεωρητ. σφάλμα	θεωρητ. σφάλμα	θεωρητ. σφάλμα	
0.1014	-0.000501	1.665E-07	h=0.1
απόλυτο σφάλμα	απόλυτο σφάλμα	απόλυτο σφάλμα	
0.116397763	-0.000391649	-8.44265E-08	
σχετικό σφάλμα	σχετικό σφάλμα	σχετικό σφάλμα	
0.038682719	-0.000130157	-2.80576E-08	

Παρατηρείστε τον τρόπο με τον οποίο μειώνονται τα σφάλματα με την μείωση του h

Το πραγματικό σφάλμα, σε σύγκριση με τα θεωρητικά σφάλματα που αντιστοιχούν στις δύο ακραίες τιμές του η

Το θεωρητικό σφάλμα για τον ορθογώνιο τύπο, βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ακραίες τιμές:

$$E_N^R = \frac{b-a}{2} h\, f'(\eta), \alpha < \eta < b$$

θεωρητικό και πραγματικό σφάλμα - Ορθογώνιος			
h	θεωρ.σφ.κατω	θεωρ.σφ.ανω	σφάλμα
0.1	0.10159	0.13185	0.11640
0.2	0.20318	0.26370	0.23201
0.3	0.30477	0.39555	0.346845

Ασκηση: Να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος: $I = \int_a^{a+12}\left(10 + e^{-\frac{x-150}{25}}\right)dx$, με την αριθμητική μέθοδο Simpson του (1/3) με μήκος υποδιαστήματος h=2, δηλαδή αριθμό υποδιαστημάτων N=6. Στις ενδιάμεσες πράξεις να χρησιμοποιούνται 5 δεκαδικά ψηφία. Σαν α, μπορείτε να θέσετε οποιονδήποτε ακέραιο από 0 έως 99.

Ο τύπος είναι:

$$S_N = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \ldots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N)$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

όπου: $f_0 = f(a), f_N = f(b) = f(a+12)$

Τα ενδιάμεσα f είναι: $f_1 = f(a+h), f_2 = f(a+2h) \ldots$

Επομένως, εδώ θα έχουμε f_0, f_1, f_2, … ???

Και ο τύπος υπολογισμού θα είναι:

$$S_N = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + ???)$$

Ασκηση: Να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος: $I = \int_a^{a+12}\left(10 + e^{-\frac{x-150}{25}}\right)dx$, με την αριθμητική μέθοδο Simpson του (1/3) με μήκος υποδιαστήματος h=2, δηλαδή αριθμό υποδιαστημάτων N=6. Στις ενδιάμεσες πράξεις να χρησιμοποιούνται 5 δεκαδικά ψηφία. Σαν α, μπορείτε να θέσετε οποιονδήποτε ακέραιο από 0 έως 99.

Ο τύπος είναι:

(Κάνετε τους υπολογισμούς, με α=αριθμό από 0 έως 99 που είναι πχ τα δύο τελευταία ψηφία του ΑΕΜ σας)

$$S_N = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \ldots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N)$$

$$h = \frac{b-a}{N}$$

όπου: $f_0 = f(a), f_N = f(b) = f(a+12)$

Τα ενδιάμεσα f είναι: $f_1 = f(a+h), f_2 = f(a+2h) \ldots$

Επομένως, εδώ θα έχουμε f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 Αφού N=6

Και ο τύπος υπολογισμού θα είναι:

$$S_N = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6)$$

Οι υπολογισμοί στο excel για όποιοδήποτε α:

Microsoft Excel Worksheet

Απαντήσεις:

	SIMPSON
a	
00	3964.84
01	3814.09
02	3669.24
03	3530.07
04	3396.36
05	3267.89
06	3144.46
07	3025.87
08	2911.93
09	2802.46
10	2697.28
11	2596.22
12	2499.13
13	2405.84
14	2316.21
15	2230.10
16	2147.36
17	2067.86
18	1991.49
19	1918.10
20	1847.60

21	1779.86
22	1714.78
23	1652.24
24	1592.16
25	1534.44
26	1478.98
27	1425.69
28	1374.50
29	1325.31
30	1278.04
31	1232.64
32	1189.01
33	1147.09
34	1106.82
35	1068.13
36	1030.95
37	995.23
38	960.91
39	927.94
40	896.26

41	865.82
42	836.58
43	808.48
44	781.49
45	755.55
46	730.63
47	706.69
48	683.68
49	661.58
50	640.34
51	619.94
52	600.34
53	581.50
54	563.41
55	546.02
56	529.32
57	513.27
58	497.85
59	483.03
60	468.80

61	455.12
62	441.98
63	429.35
64	417.22
65	405.57
66	394.37
67	383.61
68	373.28
69	363.35
70	353.81
71	344.64
72	335.83
73	327.37
74	319.24
75	311.42
76	303.92
77	296.71
78	289.78
79	283.12
80	276.72

81	270.58
82	264.67
83	259.00
84	253.55
85	248.32
86	243.28
87	238.45
88	233.81
89	229.34
90	225.06
91	220.94
92	216.98
93	213.18
94	209.52
95	206.01
96	202.64
97	199.40
98	196.29
99	193.29

Ασκηση: Για τον υπολογισμό της τιμής του ολοκληρώματος: $I = \int_1^2 x^{-1}\,dx$, με την αριθμητική μέθοδο Simpson, να βρεθεί ο αριθμός των υποδιαστημάτων έτσι ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο από 10^{-4}, και στη συνέχεια να υπολογιστεί η τιμή του.

Ο τύπος του σφάλματος είναι: $E_N^S = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta), \alpha < \eta < b$

Επομένως, χρειάζεται η 4η παράγωγος της f(x):

$$f'(x) = -x^{-2} \qquad f''(x) = 2x^{-3} \qquad f^{(3)}(x) = -6x^{-4} \qquad f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$$

$$E_N^S = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta) = \frac{2-1}{180} h^4 24x^{-5} = \frac{2}{15} h^4 x^{-5}$$

Για τις δύο ακραίες τιμές του x, ο τύπος του σφάλματος είναι:

Για x=a=1 : $E_N^S = \frac{2}{15} h^4 \leq 10^{-4} \Rightarrow h^4 \leq 0.0075 \Rightarrow h \leq 0.1655$

Για x=b=2 : $E_N^S = \frac{2}{480} h^4 \leq 10^{-4} \Rightarrow h^4 \leq 0.024 \Rightarrow h \leq 0.3936$

Δυσμενέστερη περίπτωση: $h \leq 0.1655 \Leftrightarrow N = \frac{b-a}{h} = \frac{2-1}{0.1655} \geq 6.043$

N=8 ή N=6 (λόγω του ότι συνήθως λαμβάνεται ο μέσος όρος, και επιπλέον, το 6.043 είναι πολύ κοντά στο 6)

Ασκηση: Για τον υπολογισμό της τιμής του ολοκληρώματος: $I = \int_1^2 x^{-1}\,dx$, με την αριθμητική μέθοδο Simpson, να βρεθεί ο αριθμός των υποδιαστημάτων έτσι ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο από 10^{-4}, και στη συνέχεια να υπολογιστεί η τιμή του.

$$S_N = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6)$$

Microsoft Excel Worksheet

N=6

x	f(x)		
1	1	1	1
1.1667	0.85714	4	3.428571
1.3333	0.75	2	1.5
1.5	0.66667	4	2.666667
1.6667	0.6	2	1.2
1.8333	0.54545	4	2.181818
2	0.5	1	0.5
			12.47706
		I=	0.693170
		σφ=	-3.26E-05

I= 0.693147

N=8

x	f(x)		
1	1	1	1
1.125	0.8889	4	3.555555556
1.25	0.8	2	1.6
1.375	0.7273	4	2.909090909
1.5	0.6667	2	1.333333333
1.625	0.6154	4	2.461538462
1.75	0.5714	2	1.142857143
1.875	0.5333	4	2.133333333
2	0.5	1	0.5
			16.63570874
		I=	0.693155
		σφ=	-1.06039E-05

$$I = \ln 2 - \ln 1 = 0.693147$$

$$S_N = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + f_8)$$

Αποδεικνύεται ότι το σφάλμα είναι <0.0001 ακόμα και για N=6

Παράδειγμα από την Μηχανική

Δίνεται ο πρόβολος, με μήκος L=2 m, με κατανεμημένο φορτίο που δίνεται από την συνάρτηση:

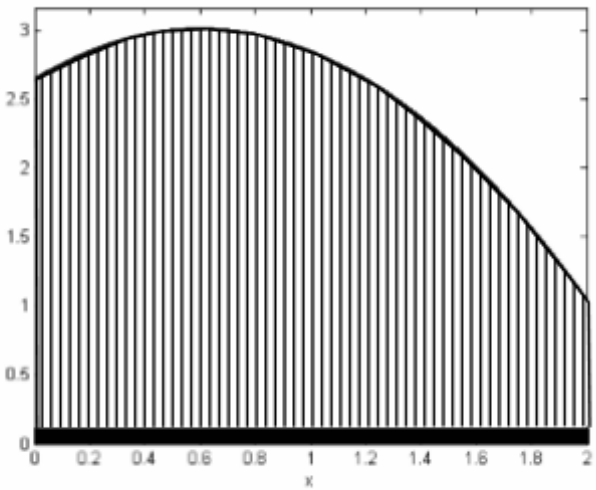
$$q(x) = 3 - (x - 0.6)^2$$

Να υπολογίσετε:

i. Το συνολικό φορτίο
ii. Την οριζόντια συντεταγμένη του κέντρου βάρους του φορτίου

Δίνονται:

$$Q_{o\lambda} = \int_0^L q(x)dx\,, \qquad x_{\kappa\beta} = \frac{\int_0^L x\,q(x)dx}{Q_{o\lambda}}$$



Να χρησιμοποιηθεί ο τύπος Simpson με 8 υποδιαστήματα

i) Η συνάρτηση φορτίου είναι $q(x) = 3 - (x - 0.6)^2$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $Q_{ολ} = \int_0^2 q(x)dx$ με την μέθοδο Simpson με 8 υποδιαστήματα. Άρα $h = \frac{2-0}{8} = 0.25$

x	$q(x)$	c	$c\,q(x)$
0,00	2,6400	1	2,6400
0,25	2,8775	4	11,5100
0,50	2,9900	2	5,9800
0,75	2,9775	4	11,9100
1,00	2,8400	2	5,6800
1,25	2,5775	4	10,3100
1,50	2,1900	2	4,3800
1,75	1,6775	4	6,7100
2,00	1,0400	1	1,0400
		Σύνολο S=	**60,1600**

Το ολοκλήρωμα θα είναι ίσο με $C \cdot h \cdot S$

$$Q_{ολ} = \frac{1}{3} 0.25 \cdot 60.16 = 5.0133$$

ii) Έχουμε να υπολογίσουμε την σχέση $x_{κβ} = \frac{\int_0^2 x\,q(x)dx}{Q_{ολ}}$. Δηλαδή, πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 x\,q(x)dx$. Ο υπολογισμός είναι εύκολος γιατί έχουμε ήδη υπολογίσει την $q(x)$ στο προηγούμενο ερώτημα. Το μόνο που χρειάζεται είναι να πολλαπλασιάσουμε κάθε γραμμή του προηγούμενου πίνακα, επί το αντίστοιχο x.

x	$x\,q(x)$	c	$c\,x\,q(x)$
0,00	0,0000	1	0,0000
0,25	0,7194	4	2,8775
0,50	1,4950	2	2,9900
0,75	2,2331	4	8,9325
1,00	2,8400	2	5,6800
1,25	3,2219	4	12,8875
1,50	3,2850	2	6,5700
1,75	2,9356	4	11,7425
2,00	2,0800	1	2,0800
		Σύνολο S=	**53,7600**

Το ολοκλήρωμα θα είναι ίσο με $C \cdot h \cdot S$

$$Q_{ολ} = \frac{1}{3} 0.25 \cdot 50.76 = 4.48$$

Άρα $x_{κβ} = \frac{\int_0^2 x\,q(x)dx}{Q_{ολ}} = \frac{4.48}{5.0133} = 0.8936$

Ο κανόνας του Simpson για n=3

Η προσέγγιση του πολυωνύμου παρεμβολής κατά Newton με τη βοήθεια του τελεστή **για n=3 δίνει τον κανόνα του Simpson των (3/8):**

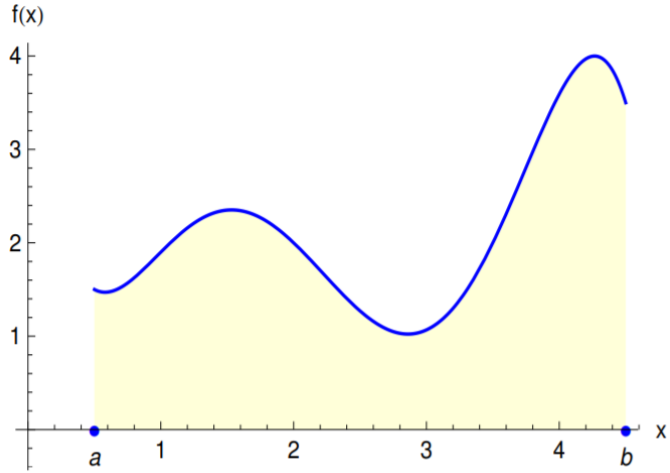
$$S_N = \frac{3h}{8}[(f_0 + f_N) + 2(f_3 + f_6 + \cdots) + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + \cdots)]$$

Ο αριθμός των διαστημάτων, για να εφαρμοστεί ο κανόνας Simpson πρέπει να είναι πολλαπλάσιος του 3, και οι συντελεστές εναλλάσσονται ως εξής:

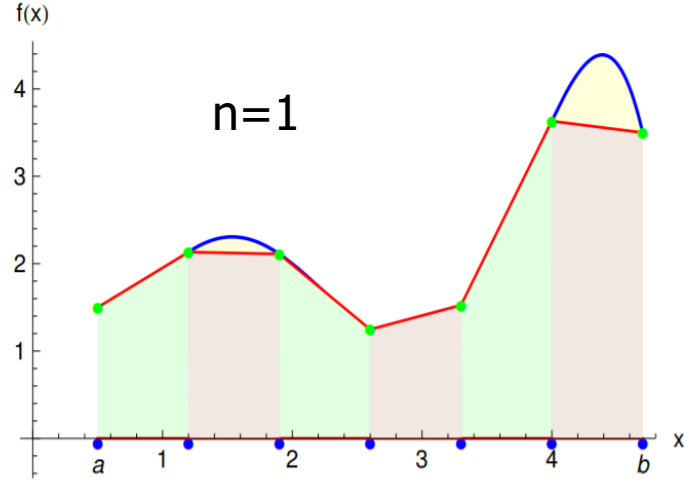
N	συντελεστές																	άθρ. συν/στ.	άθρ./N
3		1	3	3	1													8	2.6667
6		1	3	3	2	3	3	1										16	2.6667
9		1	3	3	2	3	3	2	3	3	1							24	2.6667
12		1	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3	1				32	2.6667
15		1	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3	2	3	3	1	40	2.6667

Το άθροισμα των συν/στών είναι (8/3)*N

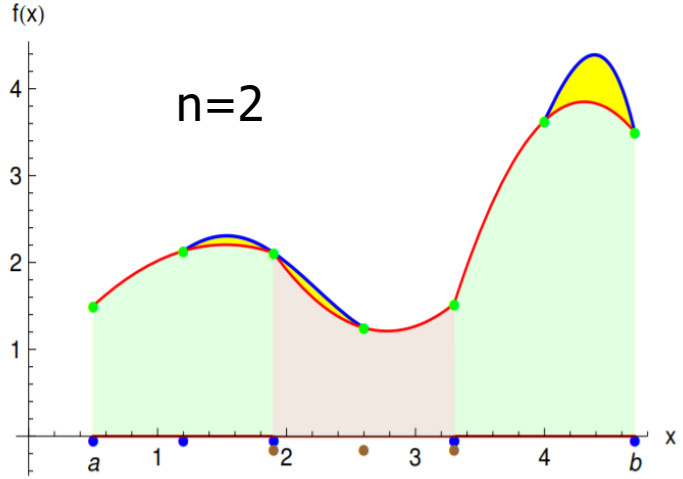
Η ακρίβεια της των προσεγγίσεων ανεβαίνει με τον n



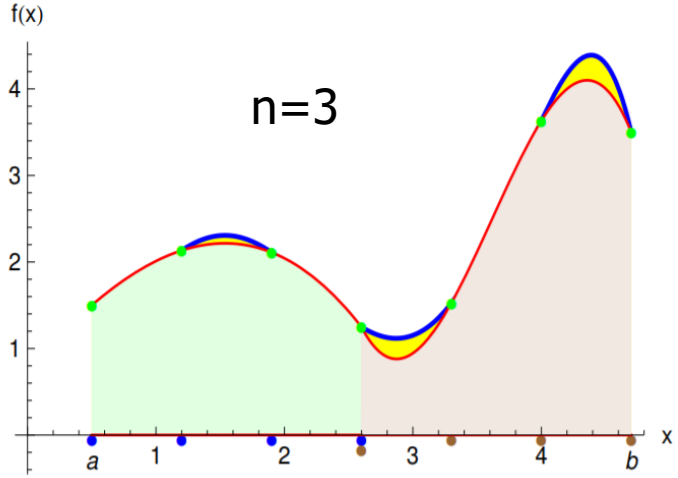
Γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος



Προσέγγιση με τον κανόνα του τραπεζίου



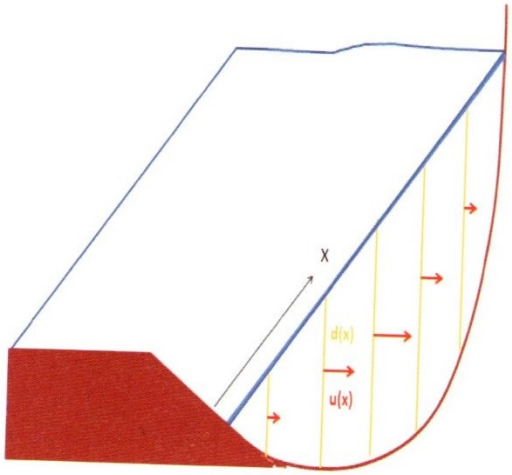
Προσέγγιση με τον κανόνα του Simpson (1/3)



Προσέγγιση με τον κανόνα του Simpson (3/8)

Άσκηση 3.18) Σε ένα ποτάμι (Σχήμα 3.23) έχει καταγραφεί το βάθος σε ορισμένες θέσεις που απέχουν απόσταση x από την μια όχθη, ταυτόχρονα με την ταχύτητα u όπως παρουσιάζονται στον πίνακα. Να υπολογίσετε την διατομή και την παροχή του ποταμού στο σημείο εκείνο. Ένδειξη: Η διατομή Α μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση $A = \int_0^H d(x)dx$ ενώ η παροχή Q από τη σχέση $Q = \int_0^H u(x)d(x)dx$.

x (m)	0	1	2	3	4	5	6
$d(x)$ (m)	0.2	1.1	1.3	1.8	0.9	0.3	0.1
$u(x)$ (m/s)	0.2	0.5	0.9	1.2	0.8	0.6	0.3



Παρατήρηση: επειδή πρόκειται για μετρήσεις στο πεδίο και όχι συναρτήσεις, εφαρμόζεται γενικά η τραπεζοειδής μέθοδος.

Data				Trapezoidal			Simpson (1/3)			Simpson (3/8)		
							h=1	h/3= 0.333333		h=1	3h/8= 0.375	
i	x	d(x)	u(x)	c_Tr	c*d	c*u*d	c_Simp(1/3)	c*d*(h/3)	c*u*d*(h/3)	c_Simp(3/8)	c*d*(3h/8)	c*u*d*(3h/8)
0	0	0.2	0.2	0.5	0.10	0.02	1	0.0667	0.0133	1	0.0750	0.0150
1	1	1.1	0.5	1	1.10	0.55	4	1.4667	0.7333	3	1.2375	0.6188
2	2	1.3	0.9	1	1.30	1.17	2	0.8667	0.7800	3	1.4625	1.3163
3	3	1.8	1.2	1	1.80	2.16	4	2.4000	2.8800	2	1.3500	1.6200
4	4	0.9	0.8	1	0.90	0.72	2	0.6000	0.4800	3	1.0125	0.8100
5	5	0.3	0.6	1	0.30	0.18	4	0.4000	0.2400	3	0.3375	0.2025
6	6	0.1	0.3	0.5	0.05	0.02	1	0.0333	0.0100	1	0.0375	0.0113
					5.55	**4.815**		**5.833**	**5.137**		**5.5125**	**4.59375**
					A(m^2)	Q(m^3/s)		A(m^2)	Q(m^3/s)		A(m^2)	Q(m^3/s)

$$T_N = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2}\right)$$

$$S_N = \frac{3h}{8}[(f_0 + f_N) + 2(f_3 + f_6 + \cdots) + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + \cdots)]$$

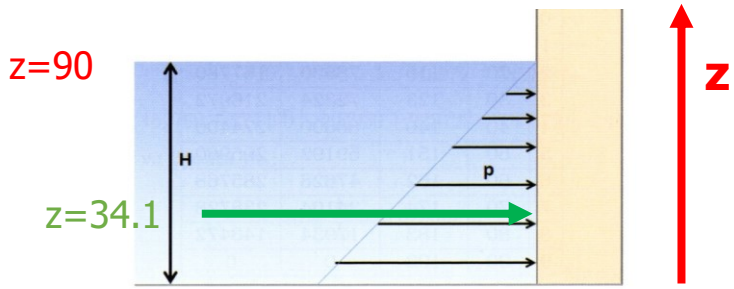
$$S_N = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 \ldots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N)$$

Παράδειγμα 3.18: Υπολογισμός δύναμης στα τοιχώματα ενός φράγματος.

Το νερό ασκεί πίεση, η οποία δίνεται από τη σχέση $p(z) = \rho g(H - z)$, όπου H είναι το ύψος της στάθμης του νερού και z είναι το ύψος από τη βάση της δεξαμενής. ρ είναι η πυκνότητα του νερού ($\rho = 10^3 Kg/m^3$) και $g = 9.8 m/s^2$ η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η πίεση αυξάνει γραμμικά και η συνολική δύναμη που ασκείται είναι:

$$f = \int_0^H \rho g w(z)(H - z)dz$$



Σχήμα 3.21.: Κατανομή πίεσης σε φράγμα.

Δύναμη σε στοιχειώδη επιφάνεια σε βάθος H-z:

$$df = pdA = \rho g(H - z)dA$$

$$f = \int \rho g(H - z)\, dA = \rho g \int_0^H (H - z)w(z)dz$$

όπου $w(z)$ είναι το πλάτος του φράγματος στο ύψος z. Η γραμμή δράσης είναι στη θέση z_0 η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$z_0 = \frac{\int_0^H \rho g z w(z)(H - z)dz}{\int_0^H \rho g w(z)(H - z)dz}$$

z (m)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$w(z)$ (m^2)	95	103	115	123	140	151	162	174	183	192

χρησιμοποιώντας τον σύνθετο κανόνα *Simpson* 3/8.

Λύση

Θα χρειαστούμε τις τιμές των συναρτήσεων y_1 και y_2 στα διάφορα ύψη:

$$y_1 = \rho g w(z)(H - z)$$

$$y_2 = \rho g z w(z)(H - z)$$

Data					Simpson (3/8)		
	H= 90				10	3h/8= 3.75	
i	z	w(z)	y1=ρgw(H-z)	y2=ρgzw(H-z)	c	c*y1	c*y2
0	0	95	83790000	0	1	83790000	0
1	10	103	80752000	807520000	3	242256000	2422560000
2	20	115	78890000	1577800000	3	236670000	4733400000
3	30	123	72324000	2169720000	2	144648000	4339440000
4	40	140	68600000	2744000000	3	205800000	8232000000
5	50	151	59192000	2959600000	3	177576000	8878800000
6	60	162	47628000	2857680000	2	95256000	5715360000
7	70	174	34104000	2387280000	3	102312000	7161840000
8	80	183	17934000	1434720000	3	53802000	4304160000
9	90	192	0	0	1	0	0
						5032912500	**1.71703E+11**
						F(N)	αριθμητής

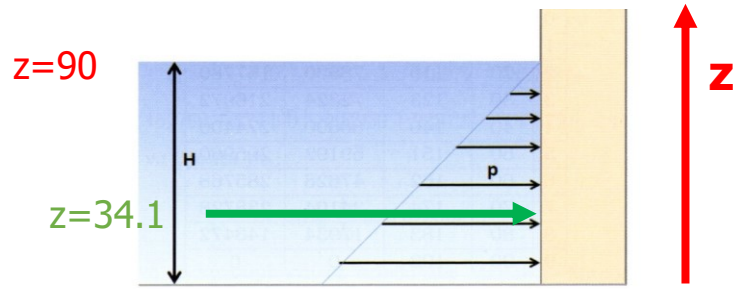
z0= 34.1

Παράδειγμα 3.18: Υπολογισμός δύναμης στα τοιχώματα ενός φράγματος.

Το νερό ασκεί πίεση, η οποία δίνεται από τη σχέση $p(z) = \rho g(H - z)$, όπου H είναι το ύψος της στάθμης του νερού και z είναι το ύψος από τη βάση της δεξαμενής. ρ είναι η πυκνότητα του νερού ($\rho = 10^3 Kg/m^3$) και $g = 9.8 m/s^2$ η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η πίεση αυξάνει γραμμικά και η συνολική δύναμη που ασκείται είναι:

$$f = \int_0^H \rho g w(z)(H - z)dz$$



Σχήμα 3.21.: Κατανομή πίεσης σε φράγμα.

όπου $w(z)$ είναι το πλάτος του φράγματος στο ύψος z. Η γραμμή δράσης είναι στη θέση z_0 η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$z_0 = \frac{\int_0^H \rho g z w(z)(H - z)dz}{\int_0^H \rho g w(z)(H - z)dz}$$

z (m)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$w(z)$ (m^2)	95	103	115	123	140	151	162	174	183	192

χρησιμοποιώντας τον σύνθετο κανόνα $Simpson$ 3/8.

Λύση

Θα χρειαστούμε τις τιμές των συναρτήσεων y_1 και y_2 στα διάφορα ύψη:

$$y_1 = \rho g w(z)(H - z)$$
$$y_2 = \rho g z w(z)(H - z)$$

ι	z(m)	w(z)(m)	$y_1(x10^3)$	$y_2(x10^4)$
0	0	95	83790	0
1	10	103	80752	80752
2	20	115	78890	157780
3	30	123	72324	216972
4	40	140	68600	274400
5	50	151	59192	295960
6	60	162	47628	285768
7	70	174	34104	238728
8	80	183	17934	143472
9	90	192	0	0

Δεδομένου ότι έχουμε 10 ισαπέχοντα σημεία έχουμε 9 διαστήματα γεγονός που μα επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον σύνθετο κανόνα $Simpson$ 3/8 . Έτσι θα έχουμε

$$I_1 = \frac{3h}{8}\{y_1(0) + 3 \cdot [y_1(10) + y_1(40)) + y_1(70)]+$$
$$+3 \cdot [y_1(20) + y_1(50) + y_1(80)]+$$
$$+2 \cdot [y_1(30) + 3(y_1(60)] + y_1(90)] =$$
$$= \frac{3h}{8}\{y_1(0) + y_1(90) + 2 \cdot [y_1(30) + y_1(60)]+$$
$$+3 \cdot [y_1(10) + y_1(20) + y_1(40) + y_1(50) + y_1(70) + y_1(80)]\}$$

Αντίστοιχα και για το ολοκλήρωμα της συνάρτησης y_2 προκύπτει:

$$I_2 = \frac{3h}{8}\{y_2(0) + 3 \cdot [y_2(10) + y_2(40)) + y_2(70)]+$$
$$+3 \cdot [y_2(20) + y_2(50) + y_2(80)]+$$
$$+2 \cdot [y_2(30) + 3(y_2(60)] + y_2(90)] =$$
$$= \frac{3h}{8}\{y_2(0) + y_2(90) + 2 \cdot [y_2(30) + y_2(60)]+$$
$$+3 \cdot [y_2(10) + y_2(20) + y_2(40) + y_2(50) + y_2(70) + y_2(80)]\}$$

Έτσι αντικαθιστώντας τις τιμές του πίνακα και δεδομένου ότι $h = 10$ θα έχουμε:

$$I_1 = \frac{3 \cdot 10}{8}[83790 + 0 + 2 \cdot (72324 + 47628)+$$

$$+3 \cdot (80752 + 78890 + 68600 + 59192 + 34104 + 17934)]x10^3 = 5.0329x10^9.....$$

και αντίστοιχα:

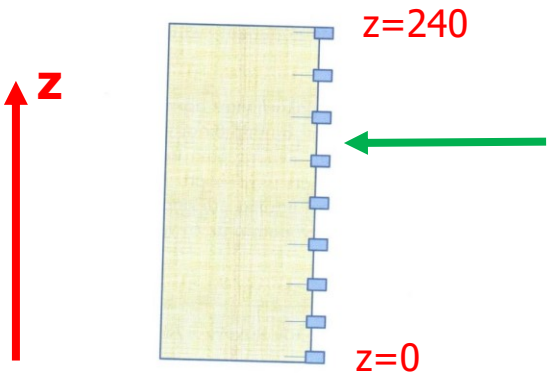
$$I_2 = \frac{3 \cdot 10}{8}[0 + 0 + 2\backslash cdot(216972 + 285768)+$$

$$+3 \cdot (80752 + 157780 + 274400 + 295960 + 238728 + 143472)] = 17170335x10^4$$

Άσκηση 3.10) Η δύναμη που ασκείται στην μια πλευρά ενός ουρανοξύστη έχε καταγραφεί με τη βοήθεια αισθητήρων (Σχήμα 3.18) συναρτήσει του ύψους όπω παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα. Να υπολογίσετε τη συνολική δύναμη και τ γραμμή δράσης της δύναμης. Η γραμμή δράσης δίνεται από τη σχέση:

$$d = \frac{\int_0^H zw(z)dz}{\int_0^H w(z)dz}$$

Οι καταγραφές παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.



Σχήμα 3.18.: Αισθητήρες δύναμης σε ουρανοξύστη.

z (m)	0	30	60	90	120	150	180	210	240
$w(z)$ (N/m^2)	40	240	1100	1540	2550	3200	3300	3500	4000

Τραπεζοειδής και Simpson 1/3

Data			Trapezoidal			Simpson (1/3)		
				h= 30			h/3= 10	
i	z	w(z)	c_Tr	c*z*w	c*w	c_Simp(1/3)	c*z*w	c*w
0	0	40	0.5	0	20.00	1	0	40.0000
1	30	240	1	7200	240.00	4	28800	960.0000
2	60	1100	1	66000	1100.00	2	132000	2200.0000
3	90	1540	1	138600	1540.00	4	554400	6160.0000
4	120	2550	1	306000	2550.00	2	612000	5100.0000
5	150	3200	1	480000	3200.00	4	1920000	12800.0000
6	180	3300	1	594000	3300.00	2	1188000	6600.0000
7	210	3500	1	735000	3500.00	4	2940000	14000.0000
8	240	4000	0.5	480000	2000.00	1	960000	4000.0000
				84204000	523500		83352000	518600
				αριθμ	παρονομ		αριθμ	παρονομ
				d=	**160.848**		**d=**	**160.725**

Ευχαριστώ για την προσοχή σας !