Νόρμες – Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα πινάκων

1. Υπενθύμιση έννοιας νόρμας και βασικών ιδιοτήτων της
2. Σπουδαιότητα των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων
3. Ορισμοί ιδιο-τιμών/ανυσμάτων
4. Προσδιορισμός περιοχής ιδιοτιμών μέθοδος Gershgorin
5. Προσδιορισμός (διαδοχικός) ιδιοτιμών με το λόγο Rayleigh
6. Προσδιορισμός ιδιοτιμών με τη μέθοδο των δυνάμεων
7. Προσδιορισμός ιδιοτιμών/διανυσμάτων 2X2 και 3X3
8. Παθολογικές καταστάσεις σε γραμμικά συστήματα
9. Παθολογικές καταστάσεις στην Χαρτογραφία

Σύντομη υπενθύμιση της έννοιας της Νόρμας διανυσμάτων και πινάκων ...

Νόρμες διανυσμάτων:

Η έννοια του μεγέθους σε διανύσματα εκφράζεται και ως μέτρο, μήκος ή απόσταση, ανάλογα με την εκάστοτε γεωμετρική εποπτεία. Ο όρος «**νόρμα**» (**norm**) υπερβαίνει τις διάφορες γεωμετρικές θεωρήσεις και έχει γενικότερη αναλυτική σημασία.

Η νόρμα ενός διανύσματος x συμβολίζεται με $\|x\|$. Για τον διδιάστατο ευκλείδειο χώρο, ως νόρμα διανύσματος x με συντεταγμένες x_1, x_2 μπορεί να ληφθεί το γνωστό μήκος:

$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2+x_2^2)^{1/2}$$

Η επέκταση στον τριδιάστατο και N-διάστατο χώρο είναι προφανής:

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2} \qquad (4.10)$$

Η απόσταση σε 2-διάστατο χώρο

Γενικός ορισμός της νόρμας

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

Νόρμα τάξης p

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2}$$

Η νόρμα απειροστής τάξης αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le N} |x_i|$$

Ιδιότητες μιάς νόρμας (περιλαμβάνονται στον ορισμό)

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2} \qquad (4.10)$$

Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι η παράσταση (4.10) ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0$ αν και μόνο αν $x=0$.

(ii) $\|k\mathbf{x}\| \leq |k|\ \|\mathbf{x}\|$, όπου k πραγματικός αριθμός.

(iii) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$

Η ισότητα ισχύει μόνο εάν τα δύο διανύσματα είναι συγγραμικά

Η τελευταία συνθήκη είναι γνωστή ως τριγωνική ανισότητα. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i \ .$$

Μια τέταρτη ιδιότητα είναι η εξής:

(iv) $\|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.

Επειδή δε το εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος,

$$\|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\| = |\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}|$$

Ιδιότητα χρήσιμη στην εξέταση παθολογικών προβλημάτων (παρακάτω)

Η έννοια της νόρμας επεκτείνεται και σε ορθογωνικούς πίνακες:

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\le j\le N} \sum_{i=1}^{N} \left|A_{ij}\right| .$$

Σε έναν πίνακα, το μέγιστο άθροισμα των απόλυτων τιμών των στοιχείων κάθε στήλης = η νόρμα πρώτης τάξης

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} \left|A_{ij}\right| .$$

Σε έναν πίνακα, το μέγιστο άθροισμα των απόλυτων τιμών των στοιχείων κάθε γραμμής = η νόρμα απειροστής τάξης

Παράδειγμα: για τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = max(3+2+6, \quad 2+1+3, \quad 5+0+1) = max(11,6,6) = 11$$

$$\|A\|_\infty = max(3+2+5, \quad 2+1+0, \quad 6+3+1) = max(10,3,10) = 10$$

1. Υπενθύμιση έννοιας νόρμας και βασικών ιδιοτήτων της
2. Σπουδαιότητα των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων
3. Ορισμοί ιδιο-τιμών/ανυσμάτων
4. Προσδιορισμός περιοχής ιδιοτιμών μέθοδος Gershgorin
5. Προσδιορισμός (διαδοχικός) ιδιοτιμών με το λόγο Rayleigh
6. Προσδιορισμός ιδιοτιμών με τη μέθοδο των δυνάμεων
7. Προσδιορισμός ιδιοτιμών/διανυσμάτων 2X2 και 3X3
8. Παθολογικές καταστάσεις σε γραμμικά συστήματα
9. Παθολογικές καταστάσεις στην Χαρτογραφία

Εφαρμογές ιδιοδιανυσμάτων - ιδιοτιμών

Τα ιδιοδιανύσματα κάνουν την κατανόηση των γραμμικών μετασχηματισμών εύκολη. Είναι οι διευθύνσεις στις οποίες ένας μετασχηματισμός δρά, επιμηκύνοντας / σμικρύνοντας, η περιστρέφοντας.

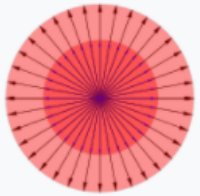
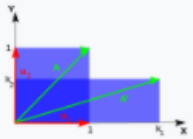
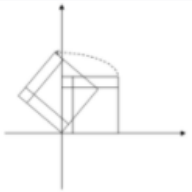
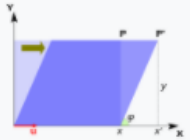
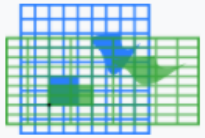
Οι ιδιοτιμές δείχνουν την μεταβλητότητα των δεδομένων στην διεύθυνση. Το ιδιοδιάνυσμα με την μεγαλύτερη τιμή είναι η κύρια διεύθυνση του μετασχηματισμού, ενώ οι ιδιοτιμές δείχνουν τους συντελεστές / παράγοντες του μετασχηματισμού.

Είναι χρήσιμοι στη ταξινόμιση εικόνων και την αναγνώριση προσώπων.

Στην παραμόρφωση πλαστικού σώματος λόγω του τανυστή των τάσεων, δείχνουν τις βασικές διευθύνσεις της παραμόρφωσης. Τα ιδιοδιανύσματα είναι τα διανύσματα των κυρίων διευθύνσεων, και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές, η αντίστοιχη ποσοστιαία παραμόρφωση.

Επιτρέπουν τον διαχωρισμό γραμμικών λειτουργιών σε επιμέρους, απλούστερα προβλήματα.

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί πινάκων 2X2

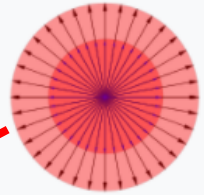
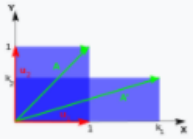
	κλιμάκωση	άνιση κλιμάκωση	περιστροφή	οριζόντια διάτμηση	Υπερβολική περιστροφή
απεικόνιση					
πίνακας	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ $c = \cos\theta$ $s = \sin\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c & s \\ s & c \end{bmatrix}$ $c = \cosh\varphi$ $s = \sinh\varphi$
χαρακτηριστικό πολυώνυμο	$(\lambda - k)^2$	$(\lambda - k_1)(\lambda - k_2)$	$\lambda^2 - 2c\lambda + 1$	$(\lambda - 1)^2$	$\lambda^2 - 2c\lambda + 1$
ιδιοτιμές λ_i	$\lambda_1 = \lambda_2 = k$	$\lambda_1 = k_1$ $\lambda_2 = k_2$	$\lambda_1 = e^{\mathbf{i}\theta} = c + s\mathbf{i}$ $\lambda_2 = e^{-\mathbf{i}\theta} = c - s\mathbf{i}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 = e^{\varphi}$ $\lambda_2 = e^{-\varphi},$
αλγεβρική πολλαπλ. $\mu_i = \mu(\lambda_i)$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$
γεωμετρική πολλαπ. $\gamma_i = \gamma(\lambda_i)$	$\gamma_1 = 2$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = 1$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$
ιδιοδιανύσματα	Όλα τα μη-μηδενικά διανύσματα	$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{i} \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ +\mathbf{i} \end{bmatrix}$	$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί πινάκων 2X2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

	κλιμάκωση	άνιση κλιμάκωση
απεικόνιση		
πίνακας	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$
χαρακτηριστικό πολυώνυμο	$(\lambda - k)^2$	$(\lambda - k_1)(\lambda - k_2)$
ιδιοτιμές λ_i	$\lambda_1 = \lambda_2 = k$	$\lambda_1 = k_1$ $\lambda_2 = k_2$
αλγεβρική πολλαπλ. $\mu_i = \mu(\lambda_i)$	$\mu_1 = 2$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$
γεωμετρική πολλαπ. $\gamma_i = \gamma(\lambda_i)$	$\gamma_1 = 2$	$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$
ιδιοδιανύσματα	Όλα τα μη-μηδενικά διανύσματα	$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί πινάκων 2X2

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.866 \\ 0.866 & 0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.37 \\ 1.366 \end{pmatrix}$$

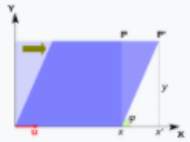
$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.866 \\ 0.866 & 0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1 \\ 4.098 \end{pmatrix}$$

θ=60°

$$\begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.414 \end{pmatrix}$$

θ=45°

$$\begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.828 \end{pmatrix}$$

περιστροφή	οριζόντια διάτμηση
	
$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ $c = \cos\theta$ $s = \sin\theta$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\lambda^2 - 2c\lambda + 1$	$(\lambda - 1)^2$
$\lambda_1 = e^{\mathbf{i}\theta} = c + s\mathbf{i}$ $\lambda_2 = e^{-\mathbf{i}\theta} = c - s\mathbf{i}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 2$
$\gamma_1 = 1$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = 1$
$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{i} \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ +\mathbf{i} \end{bmatrix}$	$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Στον τανυστή των τάσεων, υπάρχουν 3 ιδιοτιμές, οι βασικές τάσεις, και 3 αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, οι βασικές διευθύνσεις των τάσεων

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

https://uclageo.com/SoilMechanicsNotes/Section2.3.php

σ

2.0	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0
0.0	0.0	1.0

Compute =>

Eigenvalues
$\sigma_1 = 2.0$
$\sigma_2 = 1.0$
$\sigma_3 = 1.0$

σ

1	1	0.0
1	1.0	0.0
0.0	0.0	1.0

Compute =>

Eigenvalues
$\sigma_1 = 2$
$\sigma_2 = 1$
$\sigma_3 =$ -2.220446049250313e-16

σ

1.0	1	1
1	1.0	0
1	0	1.0

Compute =>

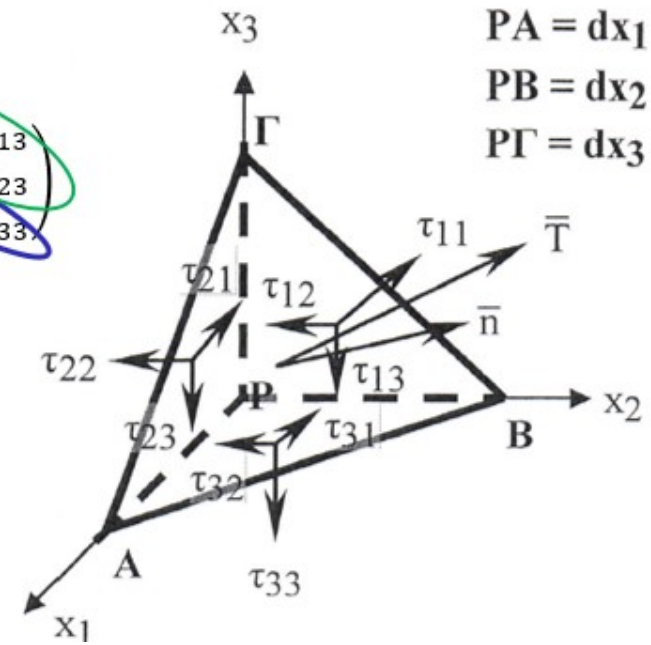
Eigenvalues
$\sigma_1 = 2.414213562373095$
$\sigma_2 = 1$
$\sigma_3 =$ -0.41421356237309537

$, \tau_{13}=\tau_{31}, \tau_{23}=\tau_{32}.$

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

διατμητικές

εφελκυστικές
ή θλιπτικές



Σπουδαιότητα ιδιοδιανυσμάτων:

Από το Open Courseware site του MIT

THE $25,000,000,000* EIGENVECTOR
THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

KURT BRYAN† AND TANYA LEISE‡

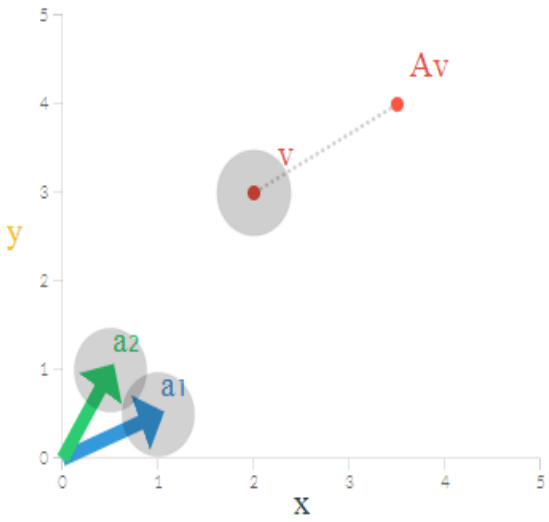
Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of webpages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced

- Ο αλγόριθμος της Google "pageRank", το βασικό πλεονέκτημα της Google, ο οποίος αξιολογεί την σπουδαιότητα των webpages, στηρίζεται σε ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα …!

- http://setosa.io/ev/eigenvectors-and-eigenvalues/

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα είναι απαραίτητα στην κατανόηση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, των μηχανικών συστημάτων, των οικολογικών συστημάτων, κ.α.

Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος v (το οποίο φαίνεται σαν σημείο) με πίνακα A, το μετατοπίζει σε καινούργιο διάνυσμα Av.



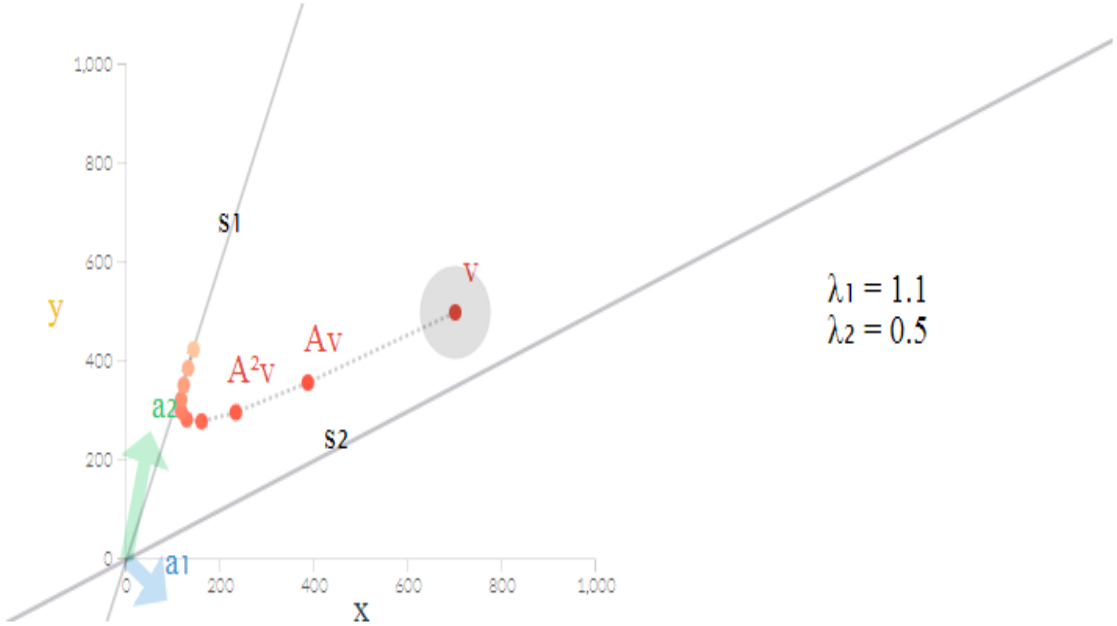
$$A = \begin{bmatrix} a_{1,x} & a_{2,x} \\ a_{1,y} & a_{2,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.50 \\ 0.50 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.00 \end{bmatrix}$$

$$Av = \begin{bmatrix} 3.50 \\ 4.00 \end{bmatrix}$$

Τι προσδιορίζουν τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές?

Συνεχίζοντας τον πολλαπλασιασμό του v με το A, δημιουργούμε την ακολουθία v, Av, A^2v, κλπ. Οι ιδιοχώροι ελκύουν την ακολουθία, και οι ιδιοτιμές προσδιορίζουν εάν έχει όριο το (0,0) ή κάποιο μακρινό σημείο. Συνεπώς, μας δίνουν την **βαθμιαία εξέλιξη συστημάτων.**



$\lambda_1 = 1.1$
$\lambda_2 = 0.5$

1. Υπενθύμιση έννοιας νόρμας και βασικών ιδιοτήτων της
2. Σπουδαιότητα των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων
3. Ορισμοί ιδιο-τιμών/ανυσμάτων
4. Προσδιορισμός περιοχής ιδιοτιμών μέθοδος Gershgorin
5. Προσδιορισμός (διαδοχικός) ιδιοτιμών με το λόγο Rayleigh
6. Προσδιορισμός ιδιοτιμών με τη μέθοδο των δυνάμεων
7. Προσδιορισμός ιδιοτιμών/διανυσμάτων 2X2 και 3X3
8. Παθολογικές καταστάσεις σε γραμμικά συστήματα
9. Παθολογικές καταστάσεις στην Χαρτογραφία

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Ορισμοί

- Το μη-μηδενικό διάνυσμα **x** *είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα* ***A*** και το λ είναι μία ιδιοτιμή του *A* εάν: Ax= λx
- Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ορίζονται μόνο για τετραγωνικούς πίνακες
- Τα ιδιοδιανύσματα δεν είναι μοναδικά (εάν x ιδιοδιάνυσμα, και το *kx* είναι ιδιοδιάνυσμα)
- Το μηδενικό διάνυσμα είναι λύση στην εξίσωση ιδιοτιμών για κάθε αριθμό λ και δεν θεωρείται ιδιοδιάνυσμα.

4.5 ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ιδιοτιμή (eigenvalue) ενός τετραγωνικού πίνακα **A**, n-οστής τάξης, λέγεται ο αριθμός **λ** που ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \qquad (4.17)$$

όπου $\mathbf{x} \neq 0$ το χαρακτηριστικό διάνυσμα ή **ιδιοδιάνυσμα (eigenvector)** του **A** που αντιστοιχεί στην τιμή **λ**. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$D(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda.\mathbf{I}) = 0, \qquad (4.18)$$

όπου **I** ο μοναδιαίος πίνακας n-οστής τάξης. Η D(λ) λέγεται χαρακτηριστική ορίζουσα και μπορεί να γραφτεί σαν πολυώνυμο ως προς λ. Επομένως ο **A** έχει τουλάχιστον μία και το πολύ n διαφορετικές ιδιοτιμές.

Γνωρίζοντας τον πίνακα **A** μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και στη συνέχεια τις ρίζες,

Παράδειγμα υπολογισμού ιδιοτιμών πίνακα 2 X 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{οπότε} \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-4-\lambda) - (3)(-2)$$
$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

θέτοντας $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

Τότε $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -2$

Οπότε οι δύο τιμές του λ είναι -1 και -2.

1. Υπενθύμιση έννοιας νόρμας και βασικών ιδιοτήτων της
2. Σπουδαιότητα των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων
3. Ορισμοί ιδιο-τιμών/ανυσμάτων
4. Προσδιορισμός περιοχής ιδιοτιμών, μέθοδος Gershgorin
5. Προσδιορισμός (διαδοχικός) ιδιοτιμών με το λόγο Rayleigh
6. Προσδιορισμός ιδιοτιμών με τη μέθοδο των δυνάμεων
7. Προσδιορισμός ιδιοτιμών/διανυσμάτων 2X2 και 3X3
8. Παθολογικές καταστάσεις σε γραμμικά συστήματα
9. Παθολογικές καταστάσεις στην Χαρτογραφία

Οταν ο πίνακας είναι μεγαλύτερων διαστάσεων, απαιτούνται πολλά χρονοβόρα υπολογιστικά βήματα, οπότε χρησιμοποιούνται άλλες μέθοδοι για τον προσεγγιστικό προσδιορισμό των ιδιοτιμών. Ενας τρόπος δίνεται από το θεώρημα Gershgorin

Θεώρημα (Gershgorin)

Έστω λ μία ιδιοτιμή ενός τετραγωνικού πίνακα $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})$, n-*οστής τάξης.*

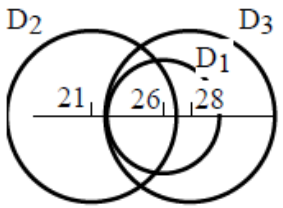
Τότε για κάποιο ακέραιο k $(1 \le k \le n)$ *ισχύει :*

$$|a_{kk} - \lambda| \le |a_{k1}| + |a_{k2}| + \ldots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \ldots + |a_{kn}| \quad (4.19)$$

Δηλαδή, για κάθε ιδιοτιμή, θα υπάρχει ένα k, για το οποίο η απόλυτη τιμή του a_{kk}-λ θα είναι μικρότερη από το άθροισμα των υπόλοιπων απόλυτων τιμών της γραμμής. Δηλαδή, κάθε μία από τις ιδιοτιμές του A, βρίσκεται μέσα σε κύκλο με κέντρο το στοιχείο της διαγωνίου και ακτίνα το άθροισμα των απολύτων τιμών των υπολοίπων στοιχείων της γραμμής.

Άσκηση

Οι ιδιοτιμές του πίνακα $\begin{vmatrix} 26 & -2 & 2 \\ 2 & 21 & 4 \\ 4 & 2 & 28 \end{vmatrix}$ βρίσκονται στους τρείς δίσκους του σχήματος.



D_1 : κέντρο στο 26, ακτίνα $|-2| + 2 = 4$

D_2 : κέντρο στο 21, ακτίνα $2 + 4 = 6$

D_3: κέντρο στο 28, ακτίνα $4 + 2 = 6$.

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\det(A-\lambda I)=(26-\lambda)\begin{vmatrix} 21-\lambda & 4 \\ 2 & 28-\lambda \end{vmatrix} -2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 28-\lambda \end{vmatrix} +4\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 21-\lambda & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 75\lambda^2 - 1850\lambda + 15000$$

Ρίζες του πολυωνύμου και ιδιοτιμές του πίνακα :
30, 25, 20

<u>Συμπέρασμα</u>: μπορούμε να προσδιορίσουμε «περιοχές» για τις ιδιοτιμές ενός πίνακα, και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστικές μεθόδους για τον ακριβή προσδιορισμό.

1. Υπενθύμιση έννοιας νόρμας και βασικών ιδιοτήτων της
2. Σπουδαιότητα των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων
3. Ορισμοί ιδιο-τιμών/ανυσμάτων
4. Προσδιορισμός περιοχής ιδιοτιμών μέθοδος Gershgorin
5. Προσδιορισμός (διαδοχικός) ιδιοτιμών με το λόγο Rayleigh
6. Προσδιορισμός όλων των ιδιοτιμών με τη μέθοδο των δυνάμεων
7. Προσδιορισμός ιδιοτιμών/διανυσμάτων 2X2 και 3X3
8. Παθολογικές καταστάσεις σε γραμμικά συστήματα
9. Παθολογικές καταστάσεις στην Χαρτογραφία

Προσεγγιστικός υπολογισμός ιδιοτιμών πινάκων με το θεώρημα Rayleigh

Δηλαδή δημιουργούμε ένα διάνυσμα x με αρχικές τιμές, το οποίο πολλαπλασιάζεται διαδοχικά με το A, s φορές. Εάν ονομάσουμε y την τελευταία τιμή του (x_s), και x την αμέσως προηγούμενη (x_{s-1}), ο λόγος του Rayleigh δίνει μία προσεγγιστική τιμή της ιδιοτιμής λ του A, και η σχέση δίνει το σφάλμα της τιμής αυτής.

Θεώρημα

Έστω **A** *πίνακας* n*-οστής τάξης πραγματικός και συμμετρικός και* $x \neq 0$ *πραγματικό διάνυσμα με* **n** *συνιστώσες.*

Έστω δε ότι $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $m_0 = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$, $m_1 = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$, $m_2 = \mathbf{y}^T\mathbf{y}$.

Τότε ο λόγος $q = m_1/m_0$ *(λόγος του Rayleigh) είναι μία προσεγγιστική τιμή της ιδιοτιμής* λ *του πίνακα* **A**, *και αν* $q = \lambda + \varepsilon$, *όπου* ε *το σφάλμα στο λόγο* q, *τότε*

$$|\varepsilon| = \sqrt{\frac{m_2}{m_0} - q^2}$$

Η αριθμητική διαδικασία Rayleigh συνεπώς είναι:

- **Διάνυσμα αρχικών τιμών x_0.**
- **Συνεχείς προσεγγίσεις του x: $x_1, x_2, \ldots, x_s$:** $x_s = Ax_{s-1}$
- **Θεωρώντας $y=x_s$ και $x=x_{s-1}$, υπολογίζονται τα m_0, m_1 και m_2:** $m_0 = x^T x$ $m_1 = x^T y$ $m_2 = y^T y$
- **Ο λόγος $q=m_1/m_0$ είναι προσεγγιστική τιμή της ιδιοτιμής λ**
- **Η ποσότητα ε είναι το σφάλμα στην ιδιοτιμή:** $|\varepsilon| = \sqrt{\frac{m_2}{m_0} - q^2}$

Παράδειγμα: Θεωρούμε τον πίνακα A και το αρχικό διάνυσμα x_0. Υπολογίζονται διαδοχικά:

$$A = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad x_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad x_1 = \mathrm{A} * x_0 = \begin{vmatrix} 10 \\ 8 \\ 8 \end{vmatrix} \quad x_2 = \mathrm{A} * x_1 = \begin{vmatrix} 96 \\ 66 \\ 66 \end{vmatrix} \quad x_3 = \mathrm{A} * x_2 = \begin{vmatrix} 900 \\ 558 \\ 558 \end{vmatrix} \quad x_4 = \mathrm{A} * x_3 = \begin{vmatrix} 8316 \\ 4806 \\ 4806 \end{vmatrix}$$

Σταματώντας τους υπολογισμούς στο x_3:
8,928 αντί για 9,000, με σφάλμα (0,460)

$$y = \begin{bmatrix} 900 \\ 558 \\ 558 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 96 \\ 66 \\ 66 \end{bmatrix}$$

$$m_0 = x^T x = [96 \quad 66 \quad 66] \begin{bmatrix} 96 \\ 66 \\ 66 \end{bmatrix} = 17928$$

$$m_1 = x^T y = [96 \quad 66 \quad 66] \begin{bmatrix} 900 \\ 558 \\ 558 \end{bmatrix} = 160056$$

$$m_2 = y^T y = [900 \quad 558 \quad 558] \begin{bmatrix} 900 \\ 558 \\ 558 \end{bmatrix} = 1432728$$

$$q = {}^{m_1}/_{m_0} = 8.928 \qquad |\varepsilon| = \sqrt{\frac{m_2}{m_0} - q^2} = 0.460$$

$$8.468 = 8.928 - 0.460 < \lambda < 8.928 + 0.460 = 9.388$$

Σταματώντας τους υπολογισμούς στο x_4:
8,967 αντί για 9,000, και με μικρότερο σφάλμα (0,323)

$$y = \begin{bmatrix} 8316 \\ 4806 \\ 4806 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 900 \\ 558 \\ 558 \end{bmatrix}$$

$$m_0 = x^T x = [900 \quad 558 \quad 558] \begin{bmatrix} 900 \\ 558 \\ 558 \end{bmatrix} = 1432728$$

$$m_1 = x^T y = [900 \quad 558 \quad 558] \begin{bmatrix} 8316 \\ 4806 \\ 4806 \end{bmatrix} = 12847896$$

$$m_2 = y^T y = [8316 \quad 4806 \quad 4806] \begin{bmatrix} 8316 \\ 4806 \\ 4806 \end{bmatrix} = 115351128$$

$$q = {}^{m_1}/_{m_0} = 8.967 \qquad |\varepsilon| = \sqrt{\frac{m_2}{m_0} - q^2} = 0.323178$$

$$8.644 = 8.967 - 0.323 < \lambda < 8.967 + 0.323 = 9.289$$

Η πραγματική τιμή είναι 9.000

1. Υπενθύμιση έννοιας νόρμας και βασικών ιδιοτήτων της
2. Σπουδαιότητα των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων
3. Ορισμοί ιδιο-τιμών/ανυσμάτων
4. Προσδιορισμός περιοχής ιδιοτιμών μέθοδος Gershgorin
5. Προσδιορισμός (διαδοχικός) ιδιοτιμών με το λόγο Rayleigh
6. Προσδιορισμός ιδιοτιμών με τη μέθοδο των δυνάμεων
7. Προσδιορισμός ιδιοτιμών/διανυσμάτων 2X2 και 3X3
8. Παθολογικές καταστάσεις σε γραμμικά συστήματα
9. Παθολογικές καταστάσεις στην Χαρτογραφία

Προσδιορισμός ιδιοδιανυσμάτων με τη μέθοδο των δυνάμεων

Έστωσαν $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …..,$\mathbf{x}_n$ n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Λαμβάνεται τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{y}_0$, το οποίο εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …..,$\mathbf{x}_n$:

$$\mathbf{y}_0 = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{x}_n$$

Ακολουθούνται τα εξής βήματα:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \lambda_1\alpha_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n\mathbf{x}_n =$$

$$\lambda_1\left(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\alpha_n\mathbf{x}_n\right)$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{z}_1 / \|\mathbf{z}_1\|_\infty$$

Όπου ο παρονομαστής είναι η απειροστή νόρμα του πίνακα z1, δηλαδή το μέγιστο από τα αθροίσματα των απόλυτων τιμών των στοιχείων των γραμμών του.

……

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{A}\mathbf{y}_{k-1} = \frac{\lambda_1^k}{\|\mathbf{z}_1\|_\infty \|\mathbf{z}_2\|_\infty \ldots \|\mathbf{z}_{k-1}\|_\infty}\left(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\alpha_n\mathbf{x}_n\right)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{z}_k / \|\mathbf{z}_k\|_\infty .$$

Τελικά

$$\frac{\mathbf{z}_{k+1\ i}}{\mathbf{y}_{k\ i}} = \lambda_1 \frac{\left(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1}\alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k+1}\alpha_n\mathbf{x}_n\right)_i}{\left(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k}\alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k}\alpha_n\mathbf{x}_n\right)_i}$$

Προκύπτει ότι

$$\frac{\mathbf{z}_{k+1\ i}}{\mathbf{y}_{k\ i}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1$$

Το $\mathbf{y}_k$ τείνει στο αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Δηλαδή:

- Δημιουργούμε τυχαίο διάνυσμα y_0, υπολογίζουμε z_1=A*y_0, κατόπιν την απειροστή νόρμα του z_1, και το y_1.
- Με την ίδια διαδικασία προκύπτουν διαδοχικά τα y_2, y_3, …, y_k.
- Το y_k τείνει στο αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Ασκηση: Να υπολογιστεί το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Διαδικασία:

- Δημιουργούμε τυχαίο διάνυσμα $y_0=(1,1,1)^T$
- υπολογίζουμε $z_1=A*y_0$
- υπολογίζουμε την απειροστή νόρμα του z_1
- υπολογίζουμε $y_1=z_1/z_{1\infty}$

Και επαναλαμβάνουμε τα τρία τελευταία βήματα:

- υπολογίζουμε $z_{k+1}=A*y_k$
- υπολογίζουμε την απειροστή νόρμα του z_k
- υπολογίζουμε $y_{k+1}=z_k/z_{k\infty}$

Έως ότου συγκλίνει το z_∞

Γραμμικός συνδυασμός 1ης γραμμής * y_0

Γραμμικός συνδυασμός 2ης γραμμής * y_0

Γραμμικός συνδυασμός 3ης γραμμής * y_0

y0	z1	y1	z2	y2	z3	y3	z4	y4	z5
1	0	0	0,5	0,077	1,615	0,273	2,312	0,35	2,333
1	7	0,5	1	0,154	-0,08	-0,01	0,039	0,006	0,425
1	14	1	6,5	1	5,923	1	6,597	1	7,12
z∞	14		6,5		5,923		6,597		7,12

y5	z6	y6	z7	y7	z8	y8	z9	y9	z10
0,328	2,148	0,301	2,07	0,294	2,077	0,297	2,097	0,3	2,104
0,06	0,549	0,077	0,51	0,073	0,467	0,067	0,457	0,065	0,462
1	7,145	1	7,035	1	6,983	1	6,985	1	6,997
z∞	7,145		7,035		6,983		6,985		6,997

y10	z11	y11	z12	y12	z13	y13	z14	y14	z15	y15
0,301	2,102	0,3	2,1	0,3	2,1	0,3	2,1	0,3	2,1	0,3
0,066	0,467	0,067	0,468	0,067	0,467	0,067	0,467	0,067	0,467	0,067
1	7,002	1	7,002	1	7	1	7	1	7	1
z∞	7,002		7,002		7		7		7	

Η προσεγγιστική διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να σταθεροποιηθεί η ιδιοτιμή z, όπως συμβαίνει εδώ από το z_{13} και μετά. Τότε το y είναι το ιδιοδιάνυσμα του πίνακα.

1. Υπενθύμιση έννοιας νόρμας και βασικών ιδιοτήτων της
2. Σπουδαιότητα των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων
3. Ορισμοί ιδιο-τιμών/ανυσμάτων
4. Προσδιορισμός περιοχής ιδιοτιμών μέθοδος Gershgorin
5. Προσδιορισμός (διαδοχικός) ιδιοτιμών με το λόγο Rayleigh
6. Προσδιορισμός ιδιοτιμών με τη μέθοδο των δυνάμεων
7. Προσδιορισμός ιδιοτιμών/διανυσμάτων 3Χ3
8. Παθολογικές καταστάσεις σε γραμμικά συστήματα
9. Παθολογικές καταστάσεις στην Χαρτογραφία

Παράδειγμα 3Χ3

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$

Οι παράγοντές του: $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι 1, 2, και 3.

Βήμα 3ο: Εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή λ1, λ2, λ3.

Κάθε ιδιοδιάνυσμα προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης $\lambda_i I - A = 0$.

Για τον προσδιορισμό κάθε ιδιοδιανύσματος, κάνουμε απαλοιφή Gauss μέχρι να προσδιοριστεί η σχέση των x2 και x1 με το x3. Υπενθυμίζεται ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα δεν είναι μοναδικό. Εκφράζεται σαν $k(x1\ \ x2\ \ x3)^T$, δηλαδή οι λόγοι x1/x3 και x2/x3 το προσδιορίζουν.

Παράδειγμα: Εύρεση ιδιοδιανύσματος για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Κάθε ιδιοδιάνυσμα προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης $\lambda I - A = 0$. Για τον προσδιορισμό κάθε ιδιοδιανύσματος, κάνουμε απαλοιφή Gauss μέχρι να προσδιοριστεί η σχέση των x2 και x1 με το x3. Υπενθυμίζεται ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα δεν είναι μοναδικό. Εκφράζεται σαν k(x1 x2 x3) , δηλαδή οι λόγοι x1/x3 και x2/x3 το προσδιορίζουν.

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λόγω μηδενικού συντελεστή και μη γραμμικής ανεξαρτησίας 2ης – 3ης γραμμής, δεν γίνεται απαλοιφή Gauss

$$-2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow -x_1 + \frac{1}{2}x_3 - x_3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x_3 = x_1$$

Για x_3=1 το ιδιοδιάνυσμα γίνεται: $k\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ή ισοδύναμα: $k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα: Εύρεση ιδιοδιανύσματος για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Κάθε ιδιοδιάνυσμα προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης $\lambda I - A = 0$.
Για τον προσδιορισμό κάθε ιδιοδιανύσματος, κάνουμε απαλοιφή Gauss μέχρι να προσδιοριστεί η σχέση των x2 και x1 με το x3. Υπενθυμίζεται ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα δεν είναι μοναδικό. Εκφράζεται σαν k(x1 x2 x3) , δηλαδή οι λόγοι x1/x3 και x2/x3 το προσδιορίζουν.

$$\lambda_2 I - A = 2I - A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{4} x_3 \qquad x_1 + x_3 - \frac{2}{4} x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} x_3$$

Για x_3=1 το ιδιοδιάνυσμα γίνεται: $k\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ή ισοδύναμα: $k\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα: Εύρεση ιδιοδιανύσματος για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Κάθε ιδιοδιάνυσμα προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης $\lambda I - A = 0$. Για τον προσδιορισμό κάθε ιδιοδιανύσματος, κάνουμε απαλοιφή Gauss μέχρι να προσδιοριστεί η σχέση των x2 και x1 με το x3. Υπενθυμίζεται ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα δεν είναι μοναδικό. Εκφράζεται σαν k(x1 x2 x3) , δηλαδή οι λόγοι x1/x3 και x2/x3 το προσδιορίζουν.

$$\lambda_3 I - A = 3I - A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{4} x_3 \qquad x_1 - \frac{1}{4} x_3 + \frac{1}{2} x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4} x_3$$

Για x_3=1 το ιδιοδιάνυσμα γίνεται: $k \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ή ισοδύναμα: $k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$

Οι παράγοντές του: $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

Επομένως οι ιδιοτιμές είναι 1, 2, και 3.

Και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα: $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Την τρίτη ιδιοτιμή και το αντίστοιχό της ιδιοδιάνυσμα την βρίσκουμε με την προσεγγιστική διαδικασία που περιγράφτηκε παραπάνω (με την παρατήρηση ότι το ιδιοδιάνυσμα βρίσκεται με τη μορφή (-0.25, 0.25, 1)T

Παράδειγμα:

Να υπολογιστούν με τη μέθοδο Jacobi όλες οι ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 12 & -4 \\ -2 & -4 & 13 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα:

Να υπολογιστούν με τη μέθοδο Jacobi όλες οι ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 12 & -4 \\ -2 & -4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 12 & -4 \\ -2 & -4 & 13 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right): \quad -\lambda^3 + 31\lambda^2 - 270\lambda + 648$$

Solve $-\lambda^3 + 31\lambda^2 - 270\lambda + 648 = 0$: $\lambda = 4, \lambda = 9, \lambda = 18$

Eigenvectors for $\lambda = 4$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigenvectors for $\lambda = 9$: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Eigenvectors for $\lambda = 18$: $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Υπενθύμιση έννοιας νόρμας και βασικών ιδιοτήτων της
2. Σπουδαιότητα των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων
3. Ορισμοί ιδιο-τιμών/ανυσμάτων
4. Προσδιορισμός περιοχής ιδιοτιμών μέθοδος Gershgorin
5. Προσδιορισμός (διαδοχικός) ιδιοτιμών με το λόγο Rayleigh
6. Προσδιορισμός ιδιοτιμών με τη μέθοδο των δυνάμεων
7. Προσδιορισμός ιδιοτιμών/διανυσμάτων 2X2 και 3X3
8. Παθολογικές καταστάσεις σε γραμμικά συστήματα
9. Παθολογικές καταστάσεις στην Χαρτογραφία

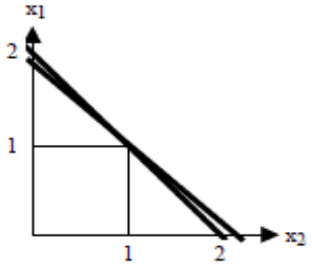
Παθολογικές καταστάσεις σε γραμμικά συστήματα

Έστω το σύστημα $\begin{vmatrix} 1.01 & 0.99 \\ 0.99 & 1.01 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}$ με προφανή ακριβή λύση την $\boxed{x_1 = 1, x_2 = 1.}$

Θεωρούμε το σύστημα $\begin{vmatrix} 1.02 & 0.99 \\ 0.99 & 1.01 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}$ στο οποίο υπάρχει μια μικρή μόνο διαφοροποίηση σε σχέση με το προηγούμενο, στον συντελεστή a_{11}.

Η επίλυση του δεύτερου συστήματος οδηγεί, με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων, στην εξής λύση $\boxed{x_1 = 0.798, x_2 = 1.197.}$

Παρατηρούμε ότι η μεταβολή των x_1 και x_2 είναι δυσανάλογα μεγάλη σε σύγκριση με τη μεταβολή στον πίνακα A του συστήματος. Για το φαινόμενο αυτό μπορεί να δοθεί μια εξήγηση, αν οι δύο εξισώσεις του αρχικού συστήματος θεωρηθούν ότι παριστάνουν δύο ευθείες σε ένα σύστημα αξόνων x_1, x_2, όπως φαίνεται στο Σχήμα.



Οι δύο αυτές ευθείες είναι σχεδόν παράλληλες και το σημείο τομής τους, δηλαδή η λύση του συστήματος, υφίσταται μεγάλες μεταβολές και όταν ακόμη οι μεταβολές της θέσης των ευθειών είναι μικρές.

Σε συστήματα περισσοτέρων εξισώσεων, η κατάσταση αυτή μπορεί να μην είναι προφανής από τη μορφή του συστήματος. Για παράδειγμα έστω το σύστημα :

$$\begin{vmatrix} 0.78 & -3.22 & 2.41 \\ 2.33 & 4.28 & -1.25 \\ 0.34 & 2.92 & -1.60 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.82 \\ -0.55 \\ -0.62 \end{vmatrix}$$

Μπορεί να επαληθευτεί άμεσα, ότι η ακριβής λύση του συστήματος είναι $\boxed{x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2.}$

Ας επιχειρήσουμε αριθμητική επίλυση του συστήματος με απαλοιφή Gauss και οδήγηση (pivoting), κρατώντας όμως σε κάθε αριθμητική πράξη μόνο τρία σημαντικά ψηφία. Τότε τα διαδοχικά βήματα στον επαυξημένο πίνακα είναι τα εξής :

$$\begin{vmatrix} 2.33 & 4.28 & -1.25 & : & -0.55 \\ 0.78 & -3.22 & 2.41 & : & 0.82 \\ 0.34 & 2.92 & -1.60 & : & -0.62 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2.33 & 4.28 & -1.25 & : & -0.55 \\ 0 & -4.65 & 2.83 & : & 1.00 \\ 0 & 2.29 & -1.42 & : & -0.54 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2.33 & 4.28 & -1.25 & : & -0.55 \\ 0 & -4.65 & 2.83 & : & 1.00 \\ 0 & 0 & -0.0276 & : & -0.048 \end{vmatrix}$$

Η λύση που προκύπτει τώρα είναι $\boxed{x_1^* = -0.853,\ x_2^* = 0.844,\ x_3^* = 1.74}$

Η διαφορά από την ακριβή λύση είναι πολύ μεγάλη, πράγμα που οφείλεται στη δυσανάλογη μεγέθυνση των σφαλμάτων που προέρχονται από τη στρογγύλευση στα τρία σημαντικά ψηφία.

Αν κρατηθούν τέσσερα ψηφία θα παρατηρηθεί κάποια βελτίωση, αλλά και πάλι οι διαφορές θα είναι σημαντικές. Η περίπτωση αυτή μπορεί να επαληθευτεί εύκολα. (Άσκηση !!).

Και στα δύο συστήματα που εξετάστηκαν υπάρχει ένα εγγενές πρόβλημα, για την ανίχνευση του οποίου πρέπει να αναζητηθεί ένα ποσοτικό κριτήριο.

Τα συστήματα αυτά εμφανίζουν μία παθολογική κατάσταση, η οποία χαρακτηρίζεται από μικρή τιμή της ορίζουσας του πίνακα A. Η τιμή όμως της ορίζουσας δεν θα μπορούσε να αποτελέσει ένα καθολικό κριτήριο, επειδή είναι δυνατόν να εμφανίσει μικρή τιμή όταν τα στοιχεία του A είναι μικρά, χωρίς να υπάρχει παθολογική κατάσταση. Μια άλλη σκέψη θα ήταν να αντικατασταθεί στα αριστερά μέλη των εξισώσεων η λύση που προκύπτει, για να διαπιστωθεί πόσο καλά αναπαράγονται τα δεξιά μέλη.

Ορίζονται τα **υπολείμματα (residuals)** **r** ως εξής :

Οι διαφορές μεταξύ αρχικών σταθερών όρων και αυτών που προκύπτουν από την λύση

$\mathbf{r} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$, όπου $\bar{\mathbf{x}}$ προσεγγιστική λύση.

Τότε

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$$

Για τον πίνακα 3 x 3 του παραδείγματος, προκύπτει ότι :

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.55 \\ 0.82 \\ -0.62 \end{vmatrix} \qquad \text{(ακριβής λύση)}$$

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\begin{vmatrix} -0.853 \\ 0.844 \\ 1.740 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.55 \\ 0.81 \\ -0.601 \end{vmatrix}$$

$r=(0.000,-0.010,0.019)^T$

Προκύπτει ότι τα υπολείμματα **r** δεν είναι πολύ μεγάλα, παρόλο που υπάρχει παθολογική κατάσταση και συνεπώς δεν μπορούν να αποτελέσουν κριτήριο.

Κατάλληλο κριτήριο βρίσκεται με τη βοήθεια της νόρμας πινάκων και διανυσμάτων.

Έστω $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}$, το διάνυσμα των διαφορών ανάμεσα στην ακριβή λύση **x** και την προσεγγιστική $\overline{\mathbf{x}}$.

Τότε,

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\mathbf{e} \quad \text{η} \quad \mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r}$$

Ακολουθούν οι ανισότητες

$$\|\mathbf{r}\| \le \|\mathbf{A}\|.\|\mathbf{e}\|$$

$$\|\mathbf{e}\| \le \|\mathbf{A}^{-1}\|.\|\mathbf{r}\|.$$

Από τις ιδιότητες νόρμας πίνακα ή διανύσματος

Από αυτές προκύπτει :

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{A}\|} \le \|\mathbf{e}\| \le \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{r}\|$$

Εντελώς ανάλογα αποδεικνύεται ότι

$$\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|} \le \|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$$

Τελικά,

$$\frac{1}{\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|}\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \le \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Σχετικό σφάλμα

Σχετικό υπόλειμμα

Στην παραπάνω ανισότητα σημειώνουμε την ποσότητα $\|\mathbf{r}\|/\|\mathbf{b}\|$ που αντιπροσωπεύει το σχετικό υπόλειμμα, επίσης την ποσότητα $\|\mathbf{e}\|/\|\mathbf{x}\|$ που αντιπροσωπεύει το σχετικό σφάλμα στη λύση του συστήματος.

Η ποσότητα $\|\mathbf{A}\|.\|\mathbf{A}^{-1}\|$ μπορεί να οριστεί ως **βαθμός κατάστασης** β.κ. (**condition number**). Πράγματι, αν ο β.κ. είναι μεγάλος, τότε το σχετικό υπόλειμμα δεν αποτελεί μέτρο ενδεικτικό της παθολογικής κατάστασης, όπως φαίνεται από την παραπάνω δεξιά ανισότητα. Αν όμως ο β.κ. είναι κοντά στη μονάδα, τότε το σχετικό υπόλειμμα αποτελεί καλό μέτρο της ευαισθησίας της λύσης, όπως φαίνεται από την παραπάνω ανισότητα.

... διότι τότε το σχετικό σφάλμα είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το σχετικό υπόλειμμα

Ασκηση: ποιός είναι ο βαθμός κατάστασης (του πίνακα του συστήματος:

$$\begin{vmatrix} 1.02 & 0.99 \\ 0.99 & 1.01 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

Βαθμός κατάστασης: $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$

$$\frac{1}{\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|} \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \le \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Αλλαγή «χιαστί»

Αλλαγή προσήμου σε μονό άθροισμα γραμμής + στήλης

$$A = \begin{pmatrix} 1.02 & 0.99 \\ 0.99 & 1.01 \end{pmatrix} \qquad minors = \begin{pmatrix} 1.01 & 0.99 \\ 0.99 & 1.02 \end{pmatrix} \qquad cofactors = \begin{pmatrix} 1.01 & -0.99 \\ -0.99 & 1.01 \end{pmatrix}$$

$$adjA = \begin{pmatrix} 1.01 & -0.99 \\ -0.99 & 1.02 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0.0501 \qquad A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \begin{pmatrix} 20.1597 & -19.7605 \\ -19.6705 & 20.3593 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = max(2.01, 2.00) = 2.01 \qquad \|A^{-1}\| = max(39.92, 40.12) = 40.12$$

Βαθμός κατάστασης: 2.01*40.12=80.64 !!!

$$0.0124 \le \frac{\sigma\chi\ \sigma\varphi\alpha\lambda}{\sigma\chi\ \upsilon\pi\acute{o}\lambda} \le 80.64$$

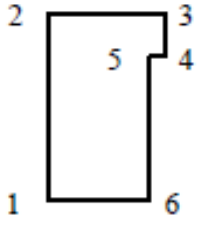
1. Υπενθύμιση έννοιας νόρμας και βασικών ιδιοτήτων της
2. Σπουδαιότητα των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων πινάκων
3. Ορισμοί ιδιο-τιμών/ανυσμάτων
4. Προσδιορισμός περιοχής ιδιοτιμών μέθοδος Gershgorin
5. Προσδιορισμός (διαδοχικός) ιδιοτιμών με το λόγο Rayleigh
6. Προσδιορισμός ιδιοτιμών με τη μέθοδο των δυνάμεων
7. Προσδιορισμός ιδιοτιμών/διανυσμάτων 2X2 και 3X3
8. Παθολογικές καταστάσεις σε γραμμικά συστήματα
9. Παθολογικές καταστάσεις στην Χαρτογραφία

4.6.1 ΠΑΘΟΛΟΓΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑΣ - ΦΩΤΟΓΡΑΜΜΕΤΡΙΑΣ

Κατά τη διάρκεια ψηφιοποίησης κτιρίων από αναλογικούς χάρτες ή από στερεοζεύγη φωτογραφιών, συμβαίνει συχνά οι ψηφιοποιημένες κορυφές των κτιρίων να μη σχηματίζουν μεταξύ τους ορθές γωνίες, είτε λόγω σφαλμάτων παρατήρησης είτε λόγω τυχαίων σφαλμάτων των χρησιμοποιουμένων οργάνων. Μια κλασική λύση του προβλήματος αυτού είναι η συνόρθωση των παρατηρουμένων συντεταγμένων με τη συνθήκη οι πλευρές να σχηματίζουν μεταξύ τους ορθές γωνίες. Όταν το μήκος μιας πλευράς σε σχέση με τις διπλανές είναι πολύ μικρό τότε ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων παρουσιάζουν παθολογική κατάσταση (ill-conditioned).

Παράδειγμα

	ακριβή		παρατηρούμενα		συνορθωμένα	
	x	y	x	y	x	y
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.016	0.117
2	0.00	100.00	0.10	100.10	0.071	100.050
3	10.00	100.00	10.00	100.00	9.951	100.044
4	10.00	75.00	9.98	75.02	9.937	75.027
5	9.90	75.00	9.80	74.99	9.937	75.027
6	9.90	0.00	10.00	0.10	9.950	0.111



Λόγω του παθολογικού (ill-conditioned) συστήματος παρατηρούμε ότι μετά τη συνόρθωση το κτίριο αποτελείται από 5 κορυφές και όχι από 6 (!!). Οι συνορθωμένες συντεταγμένες για τις κορυφές 4 και 5 είναι ίδιες (!!). Ο βαθμός κατάστασης στο παραπάνω πρόβλημα ήταν 6.10^8.

Ευχαριστώ για την προσοχή σας !