Αριθμητική Ανάλυση
4. Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Γ. Παπαευαγγέλου, ΕΔΙΠ, ΤΑΤΜ/ΑΠΘ

Επίλυση γραμμικών συστημάτων

4 ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

4.1 ΑΠΑΛΟΙΦΗ GAUSS

4.2 ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΤΡΙΔΙΑΓΩΝΙΚΟ ΠΙΝΑΚΑ

4.3 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

4.4 ΝΟΡΜΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

4. ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

4.1 ΑΠΑΛΟΙΦΗ GAUSS

Στην ανάπτυξη που ακολουθεί υποτίθενται γνωστές από τη Γραμμική Άλγεβρα οι στοιχειώδεις πράξεις των πινάκων καθώς και οι συνθήκες κάτω από τις οποίες ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει λύση.

Ένα γραμμικό σύστημα **n** εξισώσεων με **n** αγνώστους γράφεται ως εξής :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}.x_1 & + & a_{12}.x_2 & + & a_{13}.x_3 & + & \dots & + & a_{1n}.x_n & = & b_1 \\
a_{21}.x_1 & + & a_{22}.x_2 & + & a_{23}.x_3 & + & \dots & + & a_{2n}.x_n & = & b_2 \\
a_{n1}.x_1 & + & a_{n2}.x_2 & + & a_{n3}.x_3 & + & \dots & + & a_{nn}.x_n & = & b_n
\end{array}
\qquad (4.1)
$$

Η λύση του συστήματος (4.1) είναι εύκολη, αν το σύστημα έχει τριγωνική μορφή :

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + \dots & + a_{1,n-1}.x_{n-1} & + a_{1,n}.x_n & = b_1 \\
a_{22}.x_2 + \dots & + a_{2,n-1}.x_{n-1} & + a_{2,n}.x_n & = b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \\
a_{n-2,n-2}.x_{n-2} & + a_{n-2,n-1}.x_{n-1} & + a_{n-2,n}.x_n & = b_{n-2} \\
 & a_{n-1,n-1}.x_{n-1} & + a_{n-1,n}.x_n & = b_{n-1} \\
 & & a_{n,n}.x_n & = b_n
\end{array}
\qquad (4.2)
$$

Ξεκινώντας από την τελευταία εξίσωση του συστήματος (4.2), προκύπτει:

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - a_{n-1,n}.x_n)/a_{n-1,n-1}$$

$$x_{n-2} = (b_{n-2} - a_{n-2,n}.x_n - a_{n-2,n-1}.x_{n-1})/a_{n-2,n-2}$$

$$\dots$$

$$x_{n-k} = (b_{n-k} - a_{n-k,n}.x_n - a_{n-k,n-1}.x_{n-1} - a_{n-k,n-2}.x_{n-2} - \dots - a_{n-k,n-k+1}.x_{n-k+1})/a_{n-k,n-k}$$

για $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Άσκηση

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων.

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
(1) & 3x & + & 6y & + & 9z & = & 39 \\
(2) & 2x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \\
(3) & x & + & 3y & - & z & = & 2
\end{array}
$$

Λύση

Διαίρεση της (1) με το 3

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
(1') & x & + & 2y & + & 3z & = & 13 \\
(2') & 2x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \\
(3') & x & + & 3y & - & z & = & 2
\end{array}
$$

Αφαίρεση της (1') * 2 από την (2') και της (1') από την (3').

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
(1'') & x & + & 2y & + & 3z & = & 13 \\
(2'') & & & y & - & 8z & = & -23 \\
(3'') & & & y & - & 4z & = & -11
\end{array}
$$

Διαίρεση της (2'') με το 1 και αφαίρεση από την (3'').

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
(1''') & x & + & 2y & + & 3z & = & 13 \\
(2''') & & & y & - & 8z & = & -23 \\
(3''') & & & & & 4z & = & 12
\end{array}
$$

Οπισθοδρομική επίλυση.

$$
\begin{array}{lclclclcl}
z & = & 3 & & & & & & \\
y & = & -23 & + & 24 & = & 1 & & \\
x & = & 13 & - & 2 & - & 9 & = & 2
\end{array}
$$

Άρα τελική λύση : $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$.

Να επιλυθούν τα παρακάτω συστήματα με την απαλοιφή Gauss:

$$\begin{aligned} -7x - 3y + 3z &= 12 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \\ -x - 4y + 3z &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 9 \\ -2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= 4 \\ 4x_1 + 11x_2 - 4x_3 + 8x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Απαλοιφή Gauss («απλοϊκή») με την μορφή πινάκων: [A][X]=[C]

Δύο βήματα: 1. Απαλοιφή εμπρός 2. Αντικατάσταση επιστρέφοντας

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.21 \\ 0.735 \end{bmatrix}$$

x_3 από την τρίτη εξίσωση,
x_2 από την δεύτερη,
x_1 από την πρώτη εξίσωση

Απαλοιφή Gauss («απλοϊκή»): Προβλήματα

- Σφάλματα στρογγύλευσης
- Διαίρεση με το 0

$$10x_2 - 7x_3 = 3$$

$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$

$$5x_1 - x_2 + 5x_3 = 9$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & -7 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Η διαίρεση με το 0 μπορεί να εμφανιστεί σε επόμενο βήμα?

$$12x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 15$$
$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 14$$
$$24x_1 - x_2 + 5x_3 = 28$$

Μπορεί να εμφανιστεί σε κάθε βήμα …

$$\begin{bmatrix} 12 & 10 & -7 \\ 6 & 5 & 3 \\ 24 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 28 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 12 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & 6.5 \\ 12 & -21 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 6.5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Διότι μετά το πρώτο βήμα, θα μηδενιστεί και ο συντελεστής του x_2 στη δεύτερη εξίσωση, μαζί με αυτόν του x_1 … (επειδή οι αρχικοί λόγοι των συντελεστών στις δύο πρώτες εξισώσεις είναι ίσοι)

Σφάλματα στρογγύλευσης

$$\begin{bmatrix} 20 & 15 & 10 \\ -3 & -2.249 & 7 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 1.751 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ακριβής λύση:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

κρατώντας 6 σημαντικά ψηφία:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9625 \\ 1.05 \\ 0.999995 \end{bmatrix}$$

Υπάρχει λύση?
Για τα σφάλματα στρογγύλευσης, περισσότερα σημαντικά ψηφία

κρατώντας 5 σημαντικά ψηφία:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ 1.5 \\ 0.99995 \end{bmatrix}$$

Για την μείωση των σφαλμάτων και την αποφυγή της διαίρεσης με το 0: partial pivoting (μερική εναλλαγή) εξισώσεων

Τι είναι η μέθοδος μερικής εναλλαγής (Partial Pivoting)?

Στην αρχή κάθε βήματος *k* της απαλοιφής, βρίσκουμε το μέγιστο από τα:

$$|a_{kk}|, |a_{k+1,k}|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, |a_{nk}|$$

$|a_{pk}|$ Στην σειρά *p* , $k \le p \le n,$ εναλλάσσουμε τις *p* και *k σειρές*.

Παράδειγμα (στην αρχή του 2ου βήματος απαλοιφής)

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & 5.1 & 3.7 & 6 \\ 0 & -7 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 12 & 1 & 11 \\ 0 & 9 & 23 & 6 & 8 \\ 0 & -17 & 12 & 11 & 43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ποιες γραμμές αλλάζουμε μεταξύ τους?

Είμαστε στο 2ο βήμα, επομένως εξετάζουμε τους συντελεστές της 2ης στήλης. Ο μεγαλύτερος σε απόλυτη τιμή είναι ο -17 της 5ης στήλης, επομένως αλλάζουμε την 2η γραμμή με την 5η.

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & 5.1 & 3.7 & 6 \\ 0 & -17 & 12 & 11 & 43 \\ 0 & 4 & 12 & 1 & 11 \\ 0 & 9 & 23 & 6 & 8 \\ 0 & -7 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Αυτός ο έλεγχος και η ενδεχόμενη αλλαγή γίνεται σε κάθε βήμα, η υπόλοιπη διαδικασία παραμένει

Παράδειγμα απαλοιφής Gauss με partial pivoting

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix}$$

- Στο πρώτο βήμα εξετάζουμε τους συντελεστές της 1ης στήλης:

$$|25|, |64|, |144|$$

  - Η μεγαλύτερη απόλυτη τιμή είναι 144 στην γραμμή 3.
  - Εναλλαγή γραμμών 1 και 3.

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix}$$

Βήμα 1 (συνέχεια)

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 64 & 8 & 1 & \vdots & 177.2 \\ 25 & 5 & 1 & \vdots & 106.8 \end{bmatrix}$$

Διαίρεση της (1) με 144 και πολλαπλασιασμός της με 64:

$$\frac{64}{144} = 0.4444$$

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \end{bmatrix} \times 0.4444 = \begin{bmatrix} 63.99 & 5.333 & 0.4444 & \vdots & 124.1 \end{bmatrix}$$

Αφαίρεσή της από την (2):

$$\begin{array}{rcccccc} & \begin{bmatrix} 64 & & 8 & & 1 & \vdots & 177.2 \end{bmatrix} \\ - & \begin{bmatrix} 63.99 & & 5.333 & & 0.4444 & \vdots & 124.1 \end{bmatrix} \\ \hline & \begin{bmatrix} 0 & & 2.667 & & 0.5556 & \vdots & 53.10 \end{bmatrix} \end{array}$$

Κάνοντας το αντίστοιχο και με την (3) το σύστημα
Στο τέλος του 1ου βήματος έχει γίνει:

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \end{bmatrix}$$

Βήμα 2

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \end{bmatrix}$$

- Εξέταση απολύτων τιμών στήλης 2: $|2.667|, |2.917|$
- μεγαλύτερη η 2.917 στην γραμμή 3.
- Εναλλαγή σειρών 2 και 3.

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.667 & 0.5556 & \vdots & 53.10 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & \boxed{2.917} & 0.8264 & \vdots & 58.33 \\ 0 & \boxed{2.667} & 0.5556 & \vdots & 53.10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \\ 0 & 0 & -0.2 & \vdots & -0.23 \end{bmatrix}$$

Αντικατάσταση:

$$\begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 & \vdots & 279.2 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 & \vdots & 58.33 \\ 0 & 0 & -0.2 & \vdots & -0.23 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 144 & 12 & 1 \\ 0 & 2.917 & 0.8264 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 279.2 \\ 58.33 \\ -0.23 \end{bmatrix}$$

$$-0.2a_3 = -0.23$$

$$a_3 = \frac{-0.23}{-0.2}$$

$$= 1.15$$

$$2.917a_2 + 0.8264a_3 = 58.33$$

$$a_2 = \frac{58.33 - 0.8264a_3}{2.917}$$

$$= \frac{58.33 - 0.8264 \times 1.15}{2.917}$$

$$= 19.67$$

$$144a_1 + 12a_2 + a_3 = 279.2$$

$$a_1 = \frac{279.2 - 12a_2 - a_3}{144}$$

$$= \frac{279.2 - 12 \times 19.67 - 1.15}{144}$$

$$= 0.2917$$

Λύση:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2917 \\ 19.67 \\ 1.15 \end{bmatrix}$$

2η από 4 Ενότητες: Σύστημα με τριδιαγωνικό πίνακα

Το σύστημα των εξισώσεων (4.1) γράφεται ως εξής με το συμβολισμό των πινάκων : A.x = b. Ας υποτεθεί ότι έχουν βρεθεί πίνακες L και U, τέτοιοι που A = L.U και

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & . & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & . & . \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & 0 & . \\ . & . & . & . & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & . & \ell_{nn} \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & . & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & . & u_{2n} \\ . & 0 & 1 & u_{34} & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τότε L.U.x = b και L.z = b, όπου z = U.x.

Λύνεται λοιπόν πρώτα το σύστημα :

$$\begin{aligned} \ell_{11}.z_1 &= b_1 \\ \ell_{21}.z_1 + \ell_{22}.z_2 &= b_2 \\ \ell_{31}.z_1 + \ell_{32}.z_2 + \ell_{33}.z_3 &= b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \ell_{n1}.z_1 + \ell_{n2}.z_2 + \ell_{n3}.z_3 + \ldots + \ell_{nn}.z_n &= b_n \end{aligned}$$

και στη συνέχεια, με γνωστά τώρα τα z_i, απομένει το παρακάτω σύστημα άνω τριγωνικής μορφής :

$$\begin{aligned} x_1 + u_{12}.x_2 + u_{13}.x_3 + \ldots + u_{1n}.x_n &= z_1 \\ x_2 + u_{23}.x_3 + \ldots + u_{2n}.x_n &= z_2 \\ x_3 + \ldots + u_{3n}.x_n &= z_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n &= z_n \end{aligned}$$

Ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση αποτελεί πίνακας A τριδιαγωνικός :

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ . & A_3 & B_3 & C_3 & & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & A_i & B_i & C_i & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 & A_n & B_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & \alpha_i & \beta_i & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & \alpha_n & \beta_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & c_1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & c_2 & 0 & . & . & . & . \\ . & 0 & 1 & c_3 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 1 & c_i & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 & c_{n-1} \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Προκύπτει ότι

$$\beta_1 = B_1, \qquad c_1 = C_1/B_1$$

$$\alpha_i = A_i, \qquad \beta_i = B_i - c_{i-1}.\alpha_i, \qquad c_i = C_i/\beta_i, \qquad i=2, 3, \ldots, n-1$$

και $\alpha_n = A_n, \quad \beta_n = B_n - c_{n-1}.\alpha_n.$

Η λύση του συστήματος A.x = b γίνεται σε δύο στάδια :

$$z_1 = b_1/\beta_1, \quad z_i = (b_i - \alpha_i.z_{i-1})/\beta_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, n.$$

$$x_n = z_n, \; x_{n-k} = z_{n-k} - c_{n-k}.x_{n-k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Σαν άσκηση να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\qquad &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 10 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 15 \\ x_3 + 2x_4 &= 11 \end{aligned}$$

Σύστημα με τριδιαγωνικό πίνακα

Ax=b, βρίσκω A=LU και λύνω Lz=b και Ux=z (όπου Ux=z)

Παράδειγμα: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 11 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} B1 & C1 & 0 & 0 \\ A2 & B2 & C2 & 0 \\ 0 & A3 & B3 & C3 \\ 0 & 0 & A4 & B4 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} b1 & 0 & 0 & 0 \\ a2 & b2 & 0 & 0 \\ 0 & a3 & b3 & 0 \\ 0 & 0 & a4 & b4 \end{bmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{U}$$

Βρίσκονται τα L και U:

$\alpha_n = A_n$ $\alpha_i = A_i$ $b_1 = B_1$ $b_i = B_i - c_{i-1}\alpha_i$ $c_i = C_i / b_i$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 - \left(\frac{2}{1}\right) * 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 - 1 * 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 - \left(\frac{2}{1}\right) * 1 \end{bmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2/1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/(3-2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(3 - 1 * 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{U} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{U}$$

Ίδιες με του A συγκεκριμένες υπολογισμός

Οι υπολογισμοί με την εξής σειρά: c1, b2, c2, b3, c3, b4

Σύστημα με τριδιαγωνικό πίνακα

Ax=b, βρίσκω A=LU και λύνω Lz=b και Ux=z (όπου Ux=z)

Παράδειγμα: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 11 \end{bmatrix}$

L

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

U

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lz=b

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z1 \\ z2 \\ z3 \\ z4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = 5$$

$$z_2 = 10 - 5 = 5$$

$$z_3 = \frac{15 - 1 * 5}{2} = 5 \qquad z_4 = \frac{11 - 5}{\left(3/2\right)} = 4$$

Ux=z

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_4 = 4 \qquad x_3 = \frac{5 - \frac{1}{2}4}{1} = 3 \qquad x_2 = \frac{5 - 3}{1} = 2 \qquad x_1 = \frac{5 - 2 * 2}{1} = 1$$

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + \qquad\qquad &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad &= 7 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_3 + 4x_4 &= 16 \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Ax=b

Παράδειγμα:

βρίσκω A=LU και λύνω Lz=b και Ux=z (όπου Ux=z)

$\alpha_n = A_n$ $\alpha_i = A_i$ $b_1 = B_1$ $b_i = B_i - c_{i-1}\alpha_i$ $c_i = C_i / b_i$

$$A = \begin{bmatrix} B1 & C1 & 0 & 0 \\ A2 & B2 & C2 & 0 \\ 0 & A3 & B3 & C3 \\ 0 & 0 & A4 & B4 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} b1 & 0 & 0 & 0 \\ a2 & b2 & 0 & 0 \\ 0 & a3 & b3 & 0 \\ 0 & 0 & a4 & b4 \end{bmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{U} = ?*?$$

Παράδειγμα. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + \qquad\qquad &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad &= 7 \\ x_2 + 4x_3 - x_4 &= 4 \\ 2x_3 + 4x_4 &= 16 \end{aligned}$$

$\alpha_n = A_n$ $\alpha_i = A_i$ $b_1 = B_1$ $b_i = B_i - c_{i-1}\alpha_i$ $c_i = C_i / b_i$

$$A = LU \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2-\frac{1}{2}3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4+\frac{2}{7}1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4-\left(-\left(\frac{7}{30}\right)2\right) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & {}^{1}/_{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{2}/_{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{7}/_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Lz = b \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ - & -{}^{7}/_{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & {}^{30}/_{7} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & {}^{134}/_{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{2} \\ -{}^{11}/_{7} \\ {}^{13}/_{10} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Ux = z \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & {}^{1}/_{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{2}/_{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{7}/_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{2} \\ -{}^{11}/_{7} \\ {}^{13}/_{10} \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4.3 ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Οι γενικές εξισώσεις (4.1) μετασχηματίζονται ως εξής :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -(a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \ldots + a_{1n}.x_n)/a_{11} + b_1/a_{11} \\
x_2 &= -(a_{21}.x_1 + a_{23}.x_3 + \ldots + a_{2n}.x_n)/a_{22} + b_2/a_{22} \\
&\ldots \\
x_n &= -(a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + \ldots + a_{n,n-1}.x_{n-1})/a_{nn} + b_n/a_{nn}
\end{aligned}
\qquad (4.4)
$$

Δηλαδή λύνονται ως προς xi

Οι εξισώσεις (4.4) γράφονται συνοπτικά ως εξής :

$\mathbf{x} = \mathbf{B}.\mathbf{x} + \mathbf{c}$, όπου $(\mathbf{c})_i = c_i = b_i/a_{ii}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και

$(\mathbf{B})_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$ για $i \neq j$ και $(\mathbf{B})_{ij} = 0$ για $i = j$.

Οι εξισώσεις (4.4) υποδεικνύουν ένα σχήμα διαδοχικών βελτιώσεων ενός αρχικού διανύσματος $x^{(0)}$:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}.\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4.5)$$

Η επαναληπτική διαδικασία σταματά όταν $\sum_{i=1}^{n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$, όπου ε δεδομένος μικρός αριθμός.

Το υπολογιστικό σχήμα (4.5) είναι γνωστό ως **μέθοδος Jacobi**. Η μέθοδος αυτή μπορεί να τροποποιηθεί αν οι βελτιωμένες τιμές x_i χρησιμοποιούνται αμέσως μόλις προκύψουν. Τότε το επαναληπτικό σχήμα ονομάζεται **μέθοδος Gauss-Seidel**. Αν χρησιμοποιηθεί συμβολισμός αθροισμάτων και όχι πινάκων όπως στην (4.5), τότε οι δύο αυτές μέθοδοι περιγράφονται από τους τύπους :

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} + c_i , \qquad k = 0, 1, \ldots \quad \text{(Jacobi)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j^{(k)} + c_i , \qquad k = 0, 1, \ldots \quad \text{(Gauss-Seidel)}$$

Εξετάζονται τώρα οι συνθήκες κάτω από τις οποίες συγκλίνει η επαναληπτική διαδικασία Jacobi. Ορίζεται το σφάλμα στο βήμα k :

$\varepsilon^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$. Τότε από την (4.5) προκύπτει ότι

$$\varepsilon^{(k+1)} = \mathbf{B}\cdot\varepsilon^{(k)} \qquad (4.6)$$

Με βάση την (4.6) μπορεί να γίνει ανάλυση των διαδοχικών σφαλμάτων και να βρεθούν ικανές συνθήκες, κάτω από τις οποίες η μέθοδος Jacobi συγκλίνει.

Η ανάλυση αυτή καταλήγει στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

Αν ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες (i) ή (ii), τότε η μέθοδος Jacobi συγκλίνει για οποιοδήποτε αρχικό διάνυσμα x_0.

(i) $\sum_i |a_{ij}/a_{ii}| < 1, \quad j = 1, 2, \ldots, N$ (ii) $\sum_j |a_{ij}| < a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \ldots, N$

Το άθροισμα του λόγου των μη-διαγώνιων συντελεστών προς τους διαγώνιους κατ'απόλυτη τιμή για κάθε γραμμή να είναι <1

Σημειώνεται εδώ ότι η τελευταία συνθήκη εκφράζει διαγώνια υπεροχή για όλες τις σειρές του πίνακα.

Το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται συνοπτικότερα με τη βοήθεια της έννοιας της νόρμας διανύσματος, η οποία εισάγεται στην επόμενη παράγραφο.

Παράδειγμα με την μέθοδο Jacobi:

$$3X_1 + X_2 - 2X_3 = 9$$
$$-X_1 + 4X_2 - 3X_3 = -8$$
$$X_1 - X_2 + 4X_3 = 1$$

μετασχηματισμός των εξισώσεων:

$$X_1 = \frac{9 - X_2 + 2X_3}{3}$$
$$X_2 = \frac{9 + X_1 + 3X_3}{4}$$
$$X_3 = \frac{1 - X_1 + X_2}{4}$$

Iteration	X_1	$\lvert\triangle X_1\rvert$	X_2	$\lvert\triangle X_2\rvert$	X_3	$\lvert\triangle X_3\rvert$
0	1		1		1	
1	3.333	2.333	-1.000	2.000	0.250	0.750
2	3.500	0.167	-0.979	0.021	-0.833	1.803
3	2.771	0.729	-1.750	0.771	-0.870	0.036
4	3.003	0.233	-1.960	0.210	-0.880	0.010
5	3.006	0.063	-1.960	0.210	-0.991	0.111
6	2.996	0.090	-1.976	0.067	-0.994	0.003
7	2.996	0.020	-2.001	0.025	-0.988	0.006
8	3.008	0.012	-1.992	0.009	-0.999	0.011
9	2.998	0.011	-1.997	0.005	-1.000	0.001
10	2.999	0.001	-2.001	0.003	-0.999	0.001
11	3.001	0.002	-1.999	0.001	-1.000	0.001
12	3.000	0.001	-2.000	0.000	-1.000	0.001

Αρχικές τιμές: $X_1=X_2=X_3=1$. πρώτη προσέγγιση:

$$X_1 = \frac{9-(-1)+2(1)}{3} = \frac{10}{3}$$
$$X_2 = \frac{-8+1+3(1)}{4} = -1$$
$$X_3 = \frac{1-1+1}{4} = \frac{1}{4}$$

Δεύτερη προσέγγιση:

$$X_1 = \frac{9-(-1)+2(\frac{1}{4})}{3} = \frac{7}{2}$$
$$X_2 = \frac{-8+\frac{10}{3}+3(\frac{1}{4})}{4} = -\frac{47}{48}$$
$$X_3 = \frac{1-\frac{10}{3}+(-1)}{4} = \frac{-5}{6}$$

Στην διαδικασία Jacobi, συμπληρώνεται ένας κύκλος προσεγγιστικός σε όλες τις εξισώσεις πριν αλλάξουμε τις επιμέρους τιμές. Στην διαδικασία Gauss-Seidel, αλλάζουμε τις τιμές κάθε αγνώστου στις επόμενες εξισώσεις, αμέσως μόλις υπολογιστεί.

$$3X_1 + X_2 - 2X_3 = 9$$
$$-X_1 + 4X_2 - 3X_3 = -8$$
$$X_1 - X_2 + 4X_3 = 1$$

Αρχικές τιμές $X_1=X_2=X_3=1$.

Πρώτη προσέγγιση:

Οι καινούργιες τιμές των x1 και x2 χρησιμοποιούνται στη Μέθοδο Gauss - Seidel

$$X_1 = \frac{9-(-1)+2(1)}{3} = 3.333$$
$$X_2 = \frac{-8+3.333+3(1)}{4} = -0.417$$
$$X_3 = \frac{1-3.333+(-0.417)}{4} = -0.688$$

Iteration	X_1	$\lvert\triangle X_1\rvert$	X_2	$\lvert\triangle X_2\rvert$	X_3	$\lvert\triangle X_3\rvert$
0	1		1		1	
1	3.333	2.333	-0.417	1.417	-0.688	1.688
2	2.680	0.348	-1.845	1.428	-0.882	0.194
3	3.027	0.346	-1.904	0.059	-0.0983	0.101
4	2.979	0.048	-1.992	0.088	-0.993	0.010
5	3.002	0.023	-1.994	0.002	-0.999	0.006
6	2.999	0.003	-2.000	0.006	-1.000	0.001
7	3.000	0.001	-2.000	0.000	-1.000	0.000
8	3.000	0.000	-2.000	0.000	-1.000	0.000

Με την μέθοδο Jacobi χρειάστηκαν 13 επαναλήψεις για ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων.

Με την μέθοδο Gauss-Seidel μόνο 7 επαναλήψεις.

Σύγκλιση των προσεγγιστικών μεθόδων

Οι μέθοδοι Jacobi και Gauss-Seidel μπορεί να αποκλίνουν.
Εάν αλλάξουμε την σειρά των εξισώσεων στο προηγούμενο παράδειγμα, και το λύσουμε με τη μέθοδο Gauss-Seidel:

Αρχικό σύστημα:

$$3X_1 + X_2 - 2X_3 = 9$$
$$-X_1 + 4X_2 - 3X_3 = -8$$
$$X_1 - X_2 + 4X_3 = 1$$

Προηγούμενη διαμόρφωση:

$$X_1 = \frac{9 - X_2 + 2X_3}{3}$$
$$X_2 = \frac{9 + X_1 + 3X_3}{4}$$
$$X_3 = \frac{1 - X_1 + X_2}{4}$$

Διαμόρφωση μετά από εναλλαγή των δύο πρώτων εξισώσεων:

$$X_1 = 8 + 4X_2 - 3X_3$$
$$X_2 = 9 - 3X_1 + 2X_3$$
$$X_3 = \frac{1 - X_1 + X_2}{4}$$

Iteration	X_1	$\lvert\triangle X_1\rvert$	X_2	$\lvert\triangle X_2\rvert$	X_3	$\lvert\triangle X_3\rvert$
0	1		1		1	
1	9	8	-16	17	-6	7
2	-38	47	111	127	37.5	43.5
3	33935	377.5	-943.5	1045.5	-318.25	355.75

Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε λύση.
Δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχει. Πρέπει να αλλάξουμε την σειρά των εξισώσεων ώστε ο πίνακας να είναι «διαγώνιας υπεροχής» (diagonally dominant)

Προϋπόθεση σύγκλισης σχήματος Jacobi: διαγώνια υπεροχή

Τι σημαίνει για ένα σύστημα 2 εξισώσεων η διαγώνια υπεροχή?
10x+y=12 => μεγάλη κλίση (κοντά στην «κατακόρυφη»)
x+10y=21 => μικρή κλίση (σχεδόν «οριζόντια»)

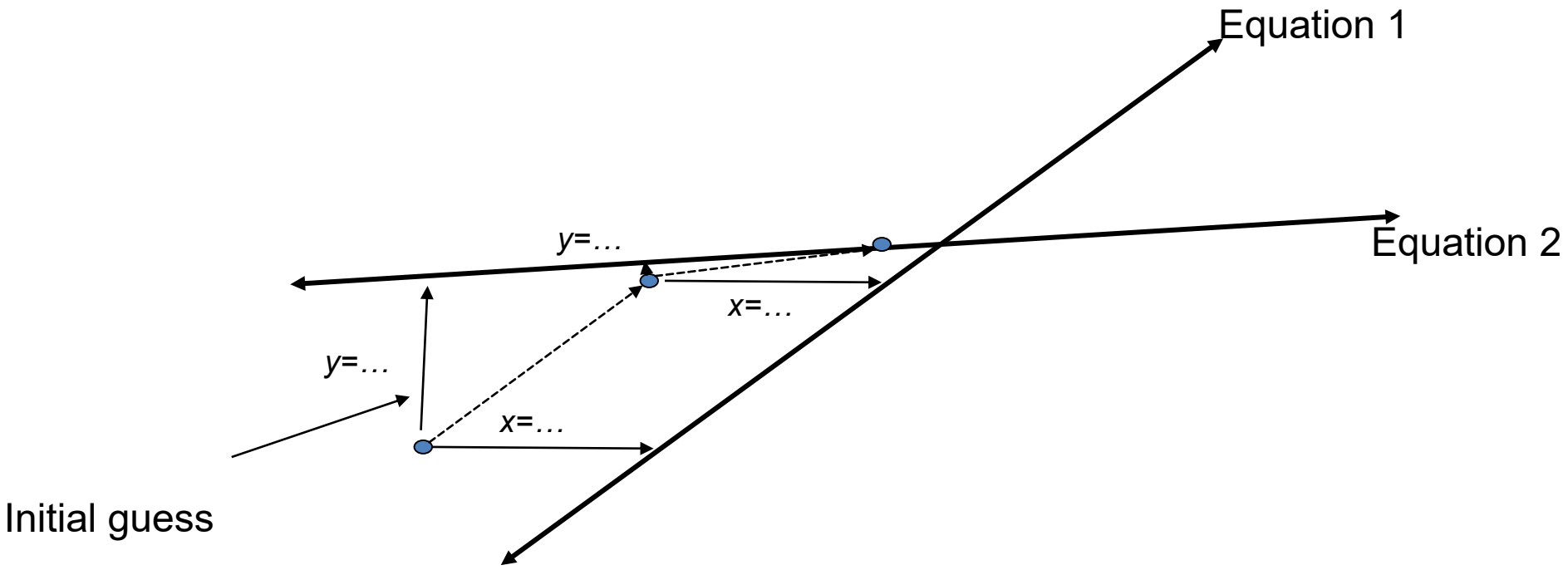
$$\left|a_{ii}\right| \geq \sum_{j=0,\, j \neq i}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

Το παραπάνω σύστημα, έχει διαγώνια υπεροχή
όταν οι 2 εξισώσεις έχουν την συγκεκριμένη σειρά.

Εάν αλλάξει η σειρά των εξισώσεων, ο σχετικός πίνακας
δεν έχει διαγώνια υπεροχή, και η μέθοδος Jacobi αποκλίνει

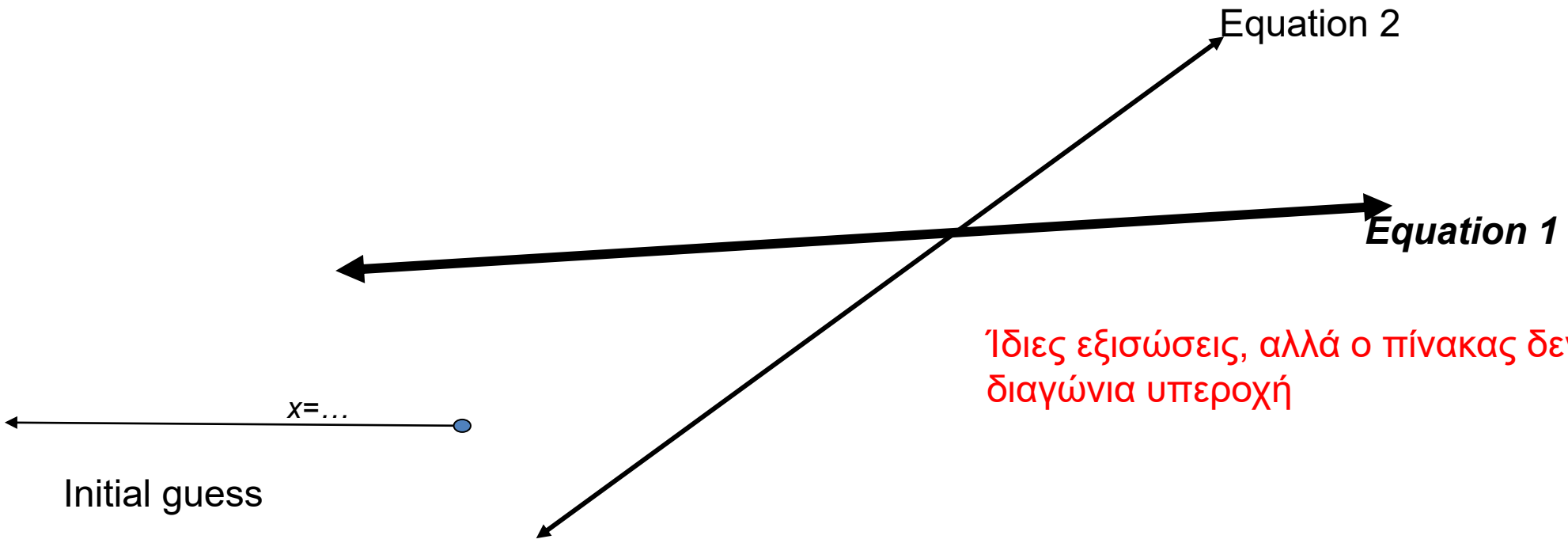
Σύγκλιση - Jacobi

Θεωρώντας το σύστημα 2 εξισώσεων:



Σύγκλιση - Jacobi

Τι θα γίνει εάν αλλάξουμε την σειρά των εξισώσεων?



Ίδιες εξισώσεις, αλλά ο πίνακας δεν έχει διαγώνια υπεροχή

Ασκηση: Να λυθεί το παρακάτω σύστημα με μία από τις μεθόδους Jacobi και Gauss-Seidel

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = x_2 + 4x_3 - 3$$

$$x_2 = 5x_1 + x_3 - 10$$

$$x_3 = 2x_1 + 8x_2 - 11$$

Είναι σωστοί οι μετασχηματισμοί των εξισώσεων? Υπάρχει κάποιο άλλο πρόβλημα με το σύστημα?

Με αυτήν τη διάταξη των εξισώσεων, δεν υπάρχει διαγώνια υπεροχή!

Πράγματι, εάν συνεχίσουμε την εφαρμογή των Jacobi και Gauss-Seidel με διαφορετικές αρχικές τιμές:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 = x_2 + 4x_3 - 3$$

$$x_2 = 5x_1 + x_3 - 10$$

$$x_3 = 2x_1 + 8x_2 - 11$$

Με αρχικές τιμές (0,0,0)

	Jacobi			Gauss – Seidel		
x1	x2	x3		x1	x2	x3
0	0	0		0	0	0
-3.0000	-10.0000	-11.0000		-3.0000	-25.0000	-217.0000
-57.0000	-36.0000	-97.0000		-896.0000	-4707.0000	-39459.0000
-427.0000	-392.0000	-413.0000		##########	##########	##########
-2047.0000	-2558.0000	-4001.0000		##########	##########	##########
-18565.0000	-14246.0000	-24569.0000		##########	##########	##########
###########	###########	###########		##########	##########	##########

Απόκλιση, ταχύτερη με Gauss-Seidel

Με αρχικές τιμές (5,5,5)

	Jacobi			Gauss – Seidel		
x1	x2	x3		x1	x2	x3
5	5	5		5	5	5
22.0000	20.0000	39.0000		22.0000	105.0000	873.0000
173.0000	139.0000	193.0000		3594.0000	#########	#########
908.0000	1048.0000	1447.0000		#########	#########	#########
6833.0000	5977.0000	#########		#########	#########	#########
#########	#########	#########		#########	#########	#########
#########	#########	#########		#########	#########	#########

Απόκλιση, ταχύτερη με Gauss-Seidel

Με αρχικές τιμές (1,1,1)

	Jacobi			Gauss – Seidel		
x1	x2	x3		x1	x2	x3
1	1	1		1	1	1
2.0000	-4.0000	-1.0000		2.0000	1.0000	1.0000
-11.0000	-1.0000	-39.0000		2.0000	1.0000	1.0000
-160.0000	-104.0000	-41.0000		2.0000	1.0000	1.0000
-271.0000	-851.0000	########		2.0000	1.0000	1.0000
########	########	########		2.0000	1.0000	1.0000
########	########	########		2.0000	1.0000	1.0000

Απόκλιση με Jacobi, σύγκλιση με Gauss-Seidel!!!

Επομένως, αλλάζουμε τη σειρά των εξισώσεων, έτσι ώστε να ισχύει η διαγώνια υπεροχή πριν το λύσουμε με μία από τις μεθόδους Jacobi και Gauss – Seidel:

Αφού οι εξισώσεις είναι τρείς, υπάρχουν 3! = 6 διαφορετικές διατάξεις:

1,2,3 1,3,2 2,1,3 2,3,1 3,1,2 3,2,1

Ποια ή ποιες θα οδηγούσαν σε διαγώνια υπεροχή?

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Επομένως, αλλάζουμε τη σειρά των εξισώσεων, ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 &= 11 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$$

… και τώρα μπορούμε να τις λύσουμε …
Με μία από τις μεθόδους Jacobi και Gauss-Seidel, και με αρχικές τιμές (0,0,0) ή (1,1,1) ή (5,5,5) …

(0,0,0)

Jacobi			Gauss – Seidel		
x1	x2	x3	x1	x2	x3
0	0	0	0	0	0
2.0000	1.3750	0.7500	2.0000	0.8750	1.0313
2.1250	0.9688	0.9063	1.9688	1.0117	0.9893
2.0125	0.9570	1.0391	2.0045	0.9975	1.0017
1.9836	1.0018	1.0139	1.9992	1.0004	0.9997
1.9976	1.0058	0.9955	2.0001	0.9999	1.0001
2.0021	1.0000	0.9979	2.0000	1.0000	1.0000
2.0004	0.9992	1.0005	2.0000	1.0000	1.0000
1.9997	1.0000	1.0003	2.0000	1.0000	1.0000
1.9999	1.0001	0.9999	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000

10η επανάληψη

6η

(1,1,1)

Jacobi			Gauss – Seidel		
x1	x2	x3	x1	x2	x3
1	1	1	1	1	1
2.0000	1.2500	0.7500	2.0000	1.0000	1.0000
2.1000	0.9688	0.9375	2.0000	1.0000	1.0000
2.0063	0.9672	1.0328	2.0000	1.0000	1.0000
1.9869	1.0025	1.0098	2.0000	1.0000	1.0000
1.9986	1.0045	0.9961	2.0000	1.0000	1.0000
2.0017	0.9999	0.9985	2.0000	1.0000	1.0000
2.0003	0.9994	1.0005	2.0000	1.0000	1.0000
1.9998	1.0000	1.0002	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0001	0.9999	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000

1η !!!

10η

(5,5,5)

Jacobi			Gauss – Seidel		
x1	x2	x3	x1	x2	x3
5	5	5	5	5	5
2.0000	0.7500	0.7500	2.0000	1.5000	0.8750
2.0000	0.9688	1.0625	2.1250	0.9531	1.0430
1.9813	1.0078	1.0078	1.9820	1.0099	0.9930
2.0000	1.0057	0.9934	2.0034	0.9983	1.0013
2.0025	0.9992	0.9986	1.9994	1.0003	0.9998
2.0001	0.9992	1.0008	2.0001	0.9999	1.0000
1.9997	1.0001	1.0002	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0001	0.9999	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000
2.0000	1.0000	1.0000	2.0000	1.0000	1.0000

9η

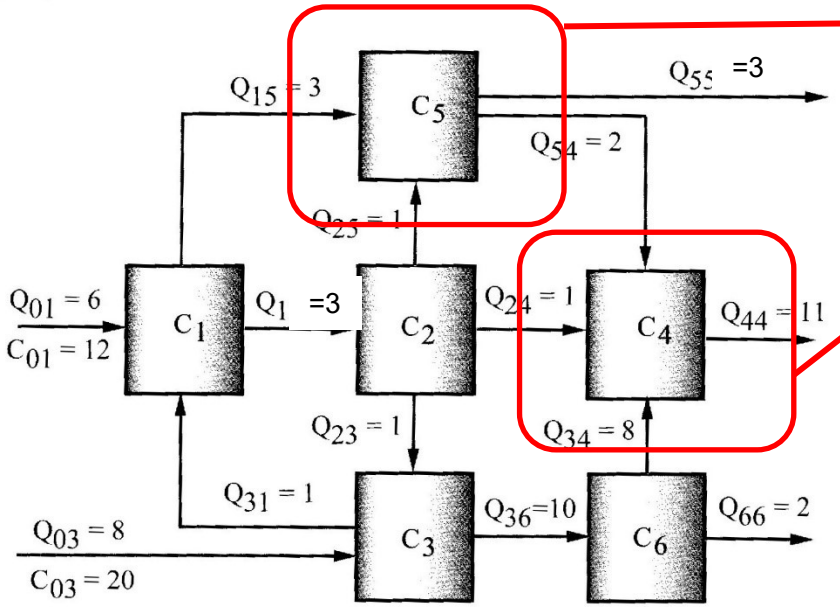
7η

Παράδειγμα από Σαρρής, Ι., Καρακασίδης Θ. (2015) «Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς», Εκδ. Τζιόλα

Παράδειγμα 2.19: Τα έξι αντιδραστήρια του Σχήματος 2.27 είναι γεμάτα με διαλυ ματα που ρέουν με σταθερό ρυθμό Q_i (σε m^3/s) όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δοχε προορίζονται για την ανάμιξη μιας χημικής ένωσης η συγκέντρωση της οποίας c_i (mg/m^3) καθορίζει την ποσότητα που θα βρίσκεται σε κάθε δοχείο. Η αρχή διατήρησι της μάζας εφαρμόζεται σε κάθε δοχείο και έχουμε:

$$\dot{m}_{i,\text{εισόδου}} = \dot{m}_{i,\text{εξόδου}}$$

όπου, $m_i = Q_i \cdot c_i$



Σχήμα 2.27.: Υπολογισμός συγκεντρώσεων συστατικών σε αντιδραστήρια.

Συγκεκριμένα σε κάθε άντιδραστήρα ισχύει:

$$6c_1 - c_3 = 72$$

$$3c_1 - 2c_2 = 0$$

$$-c_2 + 11c_3 = 160$$

$$c_2 - 11c_4 + 2c_5 + 8c_6 = 0$$

$$3c_1 + c_2 - 5c_5 = 0$$

$$10c_3 - 10c_6 = 0$$

Και το γραμμικό σύστημα που εκφράζει την συγκέντρωση της χημικής ένωσης είναι:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 0 \\ 160 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$c_2 - 11c_4 + 2c_5 + 8c_6 = 0 \Rightarrow c_4 = \frac{c_2 + 2c_5 + 8c_6}{11}$$

$$3c_1 + c_2 - 5c_5 = 0 \Rightarrow c_5 = \frac{3c_1 + c_2}{5}$$

$$10c_3 - 10c_6 = 0 \Rightarrow c_6 = c_3$$

Όσων xi ο υπολογισμός έχει προηγηθεί, μπαίνει η νέα τιμή

$$-c_2 + 11c_3 = 160 \Rightarrow c_3 = \frac{160 + c_2}{11}$$

$$3c_1 - 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{3c_1}{2}$$

$$6c_1 - c_3 = 72 \Rightarrow c_1 = 12 + {}^{c_3}/_{6}$$

Jacobi						Gauss - Seidel					
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C1	C2	C3	C4	C5	C6
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
=12+C5/6	=1.5*A5	=(160+B5)/11	=(B5+2*E5+8*F5)/11	=(3*A5+B5)/5	=C5	=12+I5/6	=1.5*G6	=(160+H6)/11	=(H6+2*K5+8*L5)/11	=(3*G6+H6)/5	=I6
=12+C6/6	=1.5*A6	=(160+B6)/11	=(B6+2*E6+8*F6)/11	=(3*A6+B6)/5	=C6	=12+I6/6	=1.5*G7	=(160+H7)/11	=(H7+2*K6+8*L6)/11	=(3*G7+H7)/5	=I7
=12+C7/6	=1.5*A7	=(160+B7)/11	=(B7+2*E7+8*F7)/11	=(3*A7+B7)/5	=C7	=12+I7/6	=1.5*G8	=(160+H8)/11	=(H8+2*K7+8*L7)/11	=(3*G8+H8)/5	=I8

Jacobi						Gauss - Seidel					
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C1	C2	C3	C4	C5	C6
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X1	X2	X3	X4	X5	X6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	14.54545	0	0	0	12	18	16.18182	1.636364	10.8	16.18182
14.42424	18	14.54545	0	7.2	14.54545	14.69697	22.04545	16.54959	15.73636	13.22727	16.54959
14.42424	21.63636	16.18182	13.52397	12.25455	14.54545	14.75826	22.1374	16.55795	16.45351	13.28244	16.55795
14.69697	21.63636	16.5124	14.77355	12.98182	16.18182	14.75966	22.13949	16.55814	16.46981	13.28369	16.55814
14.75207	22.04545	16.5124	16.09587	13.14545	16.5124	14.75969	22.13953	16.55814	16.47018	13.28372	16.55814
14.75207	22.1281	16.54959	16.40323	13.26033	16.5124	14.75969	22.13953	16.55814	16.47019	13.28372	16.55814
14.75826	22.1281	16.5571	16.43163	13.27686	16.54959	14.75969	22.13953	16.55814	16.47019	13.28372	16.55814
14.75952	22.1374	16.5571	16.46168	13.28058	16.5571	14.75969	22.13953	16.55814	16.47019	13.28372	16.55814
14.75952	22.13927	16.55795	16.46867	13.28319	16.5571	14.75969	22.13953	16.55814	16.47019	13.28372	16.55814
14.75966	22.13927	16.55812	16.46931	13.28356	16.55795	14.75969	22.13953	16.55814	16.47019	13.28372	16.55814
14.75969	22.13949	16.55812	16.47	13.28365	16.55812	14.75969	22.13953	16.55814	16.47019	13.28372	16.55814
14.75969	22.13953	16.55814	16.47016	13.28371	16.55812	14.75969	22.13953	16.55814	16.47019	13.28372	16.55814
14.75969	22.13953	16.55814	16.47017	13.28372	16.55814	14.75969	22.13953	16.55814	16.47019	13.28372	16.55814
14.75969	22.13953	16.55814	16.47019	13.28372	16.55814	14.75969	22.13953	16.55814	16.47019	13.28372	16.55814

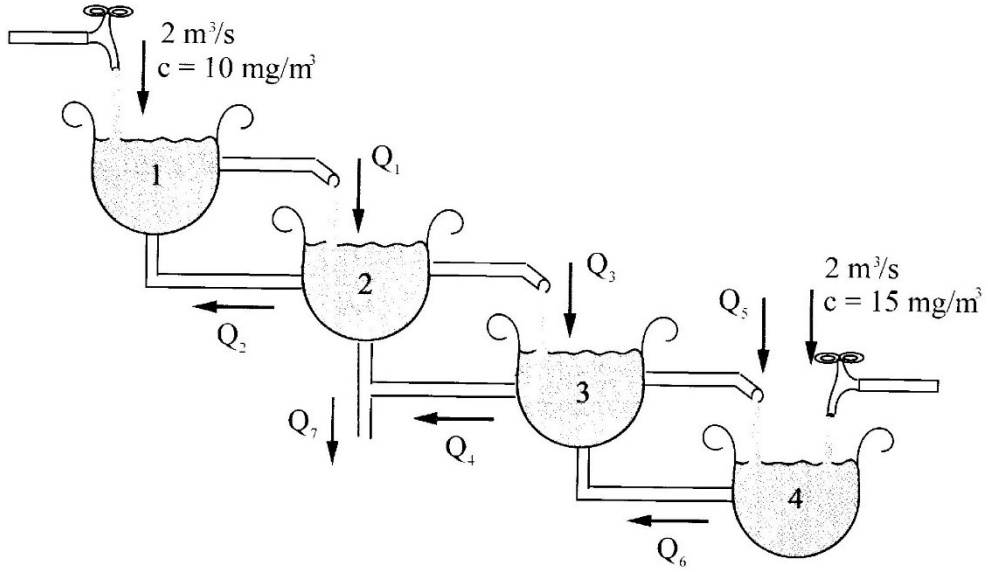
$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 0 \\ 160 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Παράδειγμα από Σαρρής, Ι., Καρακασίδης Θ. (2015) «Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές για Μηχανικούς», Εκδ. Τζιόλα, σελ.43

Παράδειγμα 2.7: Τα τέσσερα δοχεία του Σχήματος 2.11 είναι γεμάτα με νερό που ρέει με σταθερό ρυθμό Q_i (σε m^3/s) από το ένα δοχείο στο άλλο και αντίστροφα. Τα δοχεία προορίζονται για την ανάμιξη μιας χημικής ένωσης η συγκέντρωση της οποίας (σε mg/m^3) καθορίζει την ποσότητα που θα βρίσκεται σε κάθε δοχείο.

Η αρχή διατήρησης της μάζας κάθε χημικής ένωσης μας λέει ότι η μάζα που θα εισέλθει σε ένα δοχείο είναι ίση με την μάζα που θα εξέλθει ώστε να μην μεταβληθεί το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του κάθε δοχείου. Η αρχή διατήρησης της μάζας εφαρμόζεται σε κάθε δοχείο και έχουμε:

$$\dot{m}_{i,\text{εισόδου}} = \dot{m}_{i,\text{εξόδου}}$$



Σχήμα 2.11.: Συσκευή ανάμιξης χημικών ενώσεων.

Δοχείο 1: $$2 \cdot 10 + Q_2 \cdot c_2 = Q_1 \cdot c_1 \Rightarrow$$

$$-Q_1 \cdot c_1 + Q_2 \cdot c_2 = -20$$

Δοχείο 2: $$Q_1 \cdot c_1 + Q_4 \cdot c_3 = (Q_2 + Q_3 + Q_7) \cdot c_2 \Rightarrow$$

$$Q_1 \cdot c_1 - (Q_2 + Q_3 + Q_7) \cdot c_2 + Q_4 \cdot c_3 = 0$$

Δοχείο 3: $$Q_3 \cdot c_2 + Q_6 \cdot c_4 = (Q_4 + Q_5) \cdot c_3 \Rightarrow$$

$$Q_3 \cdot c_2 - (Q_4 + Q_5) \cdot c_3 + Q_6 \cdot c_4 = 0$$

Δοχείο 4: $$2 \cdot 15 + Q_5 \cdot c_3 = Q_6 \cdot c_4 \Rightarrow$$

$$Q_5 \cdot c_3 - Q_6 \cdot c_4 = -30$$

Συνολικά το γραμμικό σύστημα που εκφράζει την συγκέντρωση της χημικής ένωσης είναι:

$$\begin{aligned}
-Q_1 \cdot c_1 + Q_2 \cdot c_2 &= -20 \\
Q_1 \cdot c_1 - (Q_2 + Q_3 + Q_7) \cdot c_2 + Q_6 \cdot c_3 &= 0 \\
Q_3 \cdot c_2 - (Q_4 + Q_5) \cdot c_3 + Q_6 \cdot c_4 &= 0 \\
Q_5 \cdot c_3 - Q_6 \cdot c_4 &= -30
\end{aligned}$$

Έστω ότι έχουμε $Q_1 = Q_7 = 4, Q_2 = 2, Q_3 = 6, Q_4 = 8, Q_5 = 3$ και $Q_6 = 5$ (σε m^3/s). Σημειώνεται ότι η επιλογή των παροχών είναι αυθαίρετη αλλά όχι τυχαία, γιατί στηρίζεται στην αρχή της συνέχειας της μάζας του νερού που για κάθε δοχείο μας λέει ότι η ποσότητα που εξέρχεται πρέπει να είναι ίση με την ποσότητα που εισέρχεται. Αν

Με τις παραπάνω παροχές, πρέπει να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{aligned} -4c_1 + 2c_2 + \qquad\qquad &= -20 \\ 4c_1 - 12c_2 + 8c_3 \qquad &= 0 \\ 6c_2 - 11c_3 + 5c_4 &= 0 \\ 3c_3 - 5c_4 &= -30 \end{aligned}$$

$\alpha_n = A_n \quad \alpha_i = A_i \quad b_1 = B_1 \quad b_i = B_i - c_{i-1}\alpha_i \quad c_i = C_i / b_i$

$$A = \begin{bmatrix} B1 & C1 & 0 & 0 \\ A2 & B2 & C2 & 0 \\ 0 & A3 & B3 & C3 \\ 0 & 0 & A4 & B4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1 & 0 & 0 & 0 \\ a2 & b2 & 0 & 0 \\ 0 & a3 & b3 & 0 \\ 0 & 0 & a4 & b4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -12 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & -11 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -12 + \frac{1}{2}4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -11 + \frac{8}{10}6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 + 3 * \frac{5}{6.2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & {}^{2}/_{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & {}^{8}/_{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -{}^{5}/_{6.2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

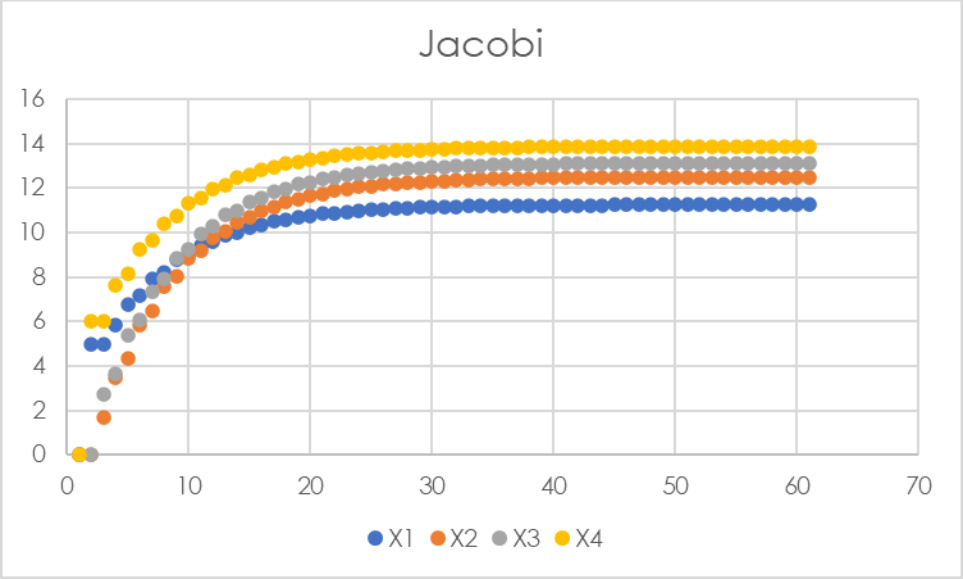
$$Lz = b \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6.2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2.581 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \\ -30 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1.935 \\ 13.875 \end{bmatrix}$$

$$Ux = z \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & {}^{-1}/_{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{4}/_{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.8065 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1.935 \\ 13.875 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.25 \\ 12.5 \\ 13.125 \\ 13.875 \end{bmatrix}$$

Τριδιαγώνιο σύστημα

		L				b	
	-4	2	0	0		-20	
	4	-12	8	0		0	
	0	6	-11	5		0	
	0	0	3	-5		-30	
						b	
	-4	0	0	0		-20	
L	4	-10	0	0	Lz=b	0	
	0	6	-6.2	0		0	
	0	0	3	-2.5806		-30	
						z	x
	1	-0.5	0	0		5	11.25
U	0	1	-0.8	0	Ux=z	2	12.5
	0	0	1	-0.8065		1.93548	13.13
	0	0	0	1		13.875	13.88

2	1	0	0		1	
3	-2	1	0		7	
0	1	4	-1		4	
0	0	2	4		16	
=I20	0	0	0		=N20	
=I21	=J21-J30*I26	0	0		=N21	
=I22	=J22	=K22-K31*J27	0		=N22	
0	0	=K23	=L23-L32*K28		=N23	
1	=J20/I25	0	0		=N25/I25	=(N30-J30*O31)
0	1	=K21/J26	0		=(N26-I26*N30)/J26	=(N31-K31*O32)
0	0	1	=L22/K27		=(N27-J27*N31)/K27	=(N32-L32*O33)
0	0	0	1		=(N28-K28*N32)/L28	=N33



Jacobi

Jacobi			
C1	C2	C3	C4
X1	X2	X3	X4
0	0	0	0
=5+B5/2	=0.333333*A5+0.6666666*C5	=(6/11)*B5+(5/11)*D5	=6+0.6*C5
=5+B6/2	=0.333333*A6+0.6666666*C6	=(6/11)*B6+(5/11)*D6	=6+0.6*C6
=5+B7/2	=0.333333*A7+0.6666666*C7	=(6/11)*B7+(5/11)*D7	=6+0.6*C7
=5+B8/2	=0.333333*A8+0.6666666*C8	=(6/11)*B8+(5/11)*D8	=6+0.6*C8
=5+B9/2	=0.333333*A9+0.6666666*C9	=(6/11)*B9+(5/11)*D9	=6+0.6*C9

4.4 ΝΟΡΜΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

Η έννοια του μεγέθους σε διανύσματα εκφράζεται και ως μέτρο, μήκος ή απόσταση, ανάλογα με την εκάστοτε γεωμετρική εποπτεία. Ο όρος «**νόρμα**» (**norm**) υπερβαίνει τις διάφορες γεωμετρικές θεωρήσεις και έχει γενικότερη αναλυτική σημασία.

Η νόρμα ενός διανύσματος x συμβολίζεται με $\|x\|$. Για τον διδιάστατο ευκλείδειο χώρο, ως νόρμα διανύσματος x με συντεταγμένες x_1, x_2 μπορεί να ληφθεί το γνωστό μήκος:

$$\|\mathbf{x}\| = (x_1^2+x_2^2)^{1/2}$$

Η επέκταση στον τριδιάστατο και N-διάστατο χώρο είναι προφανής:

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2} \qquad (4.10)$$

Η απόσταση σε N-διάστατο χώρο

Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι η παράσταση (4.10) ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0$ αν και μόνο αν x=0.

(ii) $\|k\mathbf{x}\| \leq |k|\,\|\mathbf{x}\|$, όπου k πραγματικός αριθμός.

(iii) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ Η ισότητα ισχύει μόνο εάν τα δύο διανύσματα είναι συγγραμμικά

Η τελευταία συνθήκη είναι γνωστή ως τριγωνική ανισότητα. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i \ .$$

Μια τέταρτη ιδιότητα είναι η εξής:

(iv) $$\|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \ .$$

Επειδή δε το εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος,

$$\|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}\| = |\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}|$$

Οι συνθήκες (i), (ii), (iii) και (iv) αποτελούν τον ορισμό της νόρμας. Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι η παράσταση (4.10) δεν είναι η μόνη που ικανοποιεί τις συνθήκες αυτές, δηλαδή δεν είναι η μόνη νόρμα του διανύσματος x. Για παράδειγμα, η

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$

επίσης ικανοποιεί τις συνθήκες ορισμού της νόρμας. Αν τώρα η (4.10) γενικευτεί κατά τον εξής τρόπο:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (4.13)$$

Γενικός ορισμός της νόρμας

μπορεί και πάλι να αποδειχτεί ότι και η $\|.\|_p$ είναι νόρμα. Μπορεί ακόμα εύκολα να επαληθευτεί ότι οι νόρμες (4.10) και (4.12) είναι ειδικές περιπτώσεις της (4.13):

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i| \qquad (4.14)$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2} \qquad (4.15)$$

Ακόμη αποδεικνύεται ότι

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le N} |x_i| \qquad (4.16)$$

Πράγματι, από την (4.13), $\|\mathbf{x}\|_p{}^p = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^p$

Αλλά, $\max_i |x_i|^p \le \sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \le N.\max_i |x_i|^p$

Συνεπώς, $\max_i |x_i| \le \|\mathbf{x}\|_p \le N^{1/p}.\max_i |x_i|$

Επειδή δε, $N^{1/p} \to 1$, καθώς το $p \to \infty$, προκύπτει τελικά η (4.16).

Η έννοια της νόρμας επεκτείνεται σε πίνακες. Το μέγεθος $\|\mathbf{A}\|$ είναι νόρμα του πίνακα **A**, αν είναι συνάρτηση των στοιχείων του πίνακα A και αν ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii), (iii) και (iv). Στις συνθήκες αυτές τα διανύσματα **x** και **y** αντικαθίστανται με **A** και **B**, όπου **A** και **B** πίνακες και όπου οι πράξεις που σημειώνονται είναι τώρα οι αντίστοιχες πράξεις μεταξύ πινάκων.

Νόρμες πινάκων συμβατές με τις νόρμες διανυσμάτων (4.14) και (4.16) μπορούν να διαμορφωθούν ως εξής, με βάση τη συνθήκη (iv), κατά την οποία θα πρέπει:

$$\|\mathbf{Ax}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|,$$

όπου A πίνακας και x διάνυσμα.

Θεωρούμε λοιπόν το διάνυσμα $\mathbf{Ax} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}.x_j$.

Τότε, η νόρμα $\|\,.\,\|_1$ του διανύσματος αυτού θα είναι:

$$\|\mathbf{Ax}\|_1 = \sum_{i=1}^{N}\left|\sum_{j=1}^{N} A_{ij}.x_j\right| \le \sum_i\sum_j |A_{ij}||x_j| = \sum_j \sum_i |A_{ij}||x_j| = \sum_j |x_j| \sum_i |A_{ij}| .$$

Συνεπώς, $\|\mathbf{Ax}\| \le \|\mathbf{A}\|_1.\|\mathbf{x}\|$

όπου, εξ ορισμού, $\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\le j\le N} \sum_{i=1}^{N} |A_{ij}|$.

Σε έναν πίνακα, το μέγιστο άθροισμα των απόλυτων τιμών των στοιχείων κάθε γραμμής

Η παράσταση $\|A\|_1$ ικανοποιεί την συνθήκη (iv). Μπορεί επίσης εύκολα να αποδειχτεί ότι ικανοποιεί και τις συνθήκες (i), (ii) και (iii). Συνεπώς είναι νόρμα πίνακα και μάλιστα συμβατή με τη νόρμα διανύσματος $\| \, . \, \|_1$.

Εντελώς ανάλογα, για τη νόρμα $\|A\|_\infty$ μπορεί να συναχθεί ότι

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}| \, .$$

Σε έναν πίνακα, το μέγιστο άθροισμα των απόλυτων τιμών των στοιχείων κάθε στήλης

Παράδειγμα: για τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max(3+2+6, 2+1+3, 5+0+1) = \max(11, 6, 6) = 11$$

$$\|A\|_\infty = \max(3+2+5, 2+1+0, 6+3+1) = \max(10, 3, 10) = 10$$

Ως εφαρμογή της έννοιας της νόρμας, αποδεικνύουμε το θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου.

Από την (4.6) προκύπτει: $\|\varepsilon^{(\kappa+1)}\| \le \|\mathbf{B}\| \, . \, \|\varepsilon^{(\kappa)}\|$,

όπου $\|\mathbf{B}\|$ νόρμα του πίνακα B συμβατή με τη νόρμα $\|\varepsilon\|$ του διανύσματος ε.

Αν $\|\mathbf{B}\| \le M < 1$, τότε,

$$\left\|\varepsilon^{(k+1)}\right\| \le M.\left\|\varepsilon^{(k)}\right\| \le M^2.\left\|\varepsilon^{(k-1)}\right\| \le \ldots \le M^{(k+1)}\left\|\varepsilon^{(0)}\right\| \to 0$$

και η ακολουθία $\|\varepsilon(k)\| \to 0$, καθώς το $k \to \infty$.

Αν $\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{B}\|_1$, τότε η παραπάνω συνθήκη γράφεται ως εξής, με βάση τον ορισμό της νόρμας $\| \, . \, \|_1$:

$$\max_j \sum_i \left| b_{ij} \right| < 1 \ . \qquad (\alpha)$$

Αν $\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{B}\|_\infty$, τότε η συνθήκη για τη σύγκλιση της μεθόδου γράφεται ως εξής με βάση τον ορισμό της νόρμας $\| \, . \, \|_\infty$:

$$\max_i \sum_j \left| b_{ij} \right| < 1 \ . \qquad (\beta)$$

Οι δύο παραπάνω ανισότητες είναι ισοδύναμες αντίστοιχα με τις συνθήκες (i) και (ii) του θεωρήματος της παραγράφου (4.3).

Θεώρημα

Αν ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες (i) ή (ii), τότε η μέθοδος Jacobi συγκλίνει για οποιοδήποτε αρχικό διάνυσμα x_0.

(i) $\sum_i | a_{ij} / a_{ii} | < 1, \quad j = 1, 2, \ldots, N$ (ii) $\sum_j | a_{ij} | < a_{ii} |, \quad i = 1, 2, \ldots, N$

Ευχαριστώ για την προσοχή σας !