Αριθμητική Ανάλυση
3. Υπολογισμός Ριζών Πολυωνύμων

Γ. Παπαευαγγέλου, ΕΔΙΠ, ΤΑΤΜ/ΑΠΘ

Υπολογισμός ριζών πολυωνύμων

- Τιμή πολυωνύμου και της παραγώγου του από τους συντελεστές του
- Γενικευμένα, οι τιμές των παραγώγων όλων των τάξεων
- Μέθοδος Newton – Raphson : ρίζες πολυωνύμων από του συντελεστές τους
- Μέθοδος Bernoulli για την εύρεση των δύο πρώτων ριζών
- Εντοπισμός διαστημάτων ριζών πολυωνύων

Τιμή πολυωνύμου και της παραγώγου του από τους συντελεστές του

Η ύψωση του x σε δυνάμεις, προξενεί σφάλματα για πολύ μικρές και πολύ μεγάλες τιμές του x.
Για τον λόγο αυτό, και για μικρότερο αριθμό πράξεων, μετασχηματίζεται ένα πολυώνυμο ως εξής:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$$

$$= a_0 + x.(a_1 + a_2.x + a_3.x^2 + \ldots + a_n.x^{n-1}) =$$

$$= a_0 + x.(a_1 + x.(a_2 + a_3.x + a_4.x^2 + \ldots + a_n.x^{n-2})) =$$

$$= a_0 + x.(a_1 + x.(a_2 + x.(a_3 + a_4.x + \ldots + a_n.x^{n-3}))) =$$

$$= . \quad . \quad .$$

$$= a_0 + x.(a_1 + x.(a_2 + x.(a_3 + \ldots + x.(a_{n-1} + x.a_n)) \ldots$$

Παράδειγμα:

$$p_n(x) = 2x + 7 - 2x^3 + x^4$$
$$p_n(x) = 7 + 2x + 0x^2 - 2x^3 + x^4$$
$$p_n(x) = 7 + x(2 + 0x - 2x^2 + x^3)$$
$$p_n(x) = 7 + x\left(2 + x\left(0 - 2x + x^2\right)\right)$$
$$p_n(x) = 7 + x\left(2 + x\left(0 + x(-2 + x)\right)\right)$$

Η τιμή του πολυωνύμου στη θέση z, μπορεί να προσδιοριστεί, με τον διαδοχικό υπολογισμό παρενθέσεων, ξεκινώντας από το $b_n=a_n$:

b_n	=	a_n		
b_{n-1}	=	a_{n-1}	+	$z.b_n$
.	.		.	
b_{n-i}	=	a_{n-i}	+	$z.b_{n-i+1}$
.	.		.	
b_0	=	a_0	+	$z.b_1$

z=3: $b_4 = 1 = a_4$

$b_3 = a_3 + z\, b_4 = (-2) + 3 \cdot 1 = 1$

$b_2 = a_2 + z\, b_3 = 0 + 3 \cdot 1 = 3$

$b_1 = a_1 + z\, b_2 = 2 + 3 \cdot 3 = 11$

$b_0 = a_0 + z\, b_1 = 7 + 3 \cdot 11 = 40$

Τιμή πολυωνύμου και της παραγώγου του από τους συντελεστές του

Με τρόπο όμοιο με τον οποίο προκύπτουν τα bi από τα ai, προκύπτουν οι συνελεστές ci από τα bi.
Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής c1 είναι ίσος με την τιμή της πρώτης παραγώγου στην ίδια θέση.

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$$

b_n	=	a_n		
b_{n-1}	=	a_{n-1}	+	$z.b_n$
.	.		.	
b_{n-i}	=	a_{n-i}	+	$z.b_{n-i+1}$
.	.		.	
b_0	=	a_0	+	$z.b_1$

.

c_n	=	b_n		
c_{n-1}	=	b_{n-1}	+	$z.c_n$
.	.	.	.	.
c_1	=	b_1	+	$z.c_2$

Οι συντελεστές c, εκτός από τον c1, θα χρησιμεύσουν στην γενίκευση του υπολογισμού των παραγώγων όλων των τάξεων

Ο αλγόριθμος υπολογισμού τιμής πολυωνύμου και της παραγώγου του σε θέση x=z=3:

b_n	=	a_n		
b_{n-1}	=	a_{n-1}	+	$z.b_n$
.	.		.	
b_{n-i}	=	a_{n-i}	+	$z.b_{n-i+1}$
.	.		.	
b_0	=	a_0	+	$z.b_1$

.

c_n	=	b_n		
c_{n-1}	=	b_{n-1}	+	$z.c_n$
.	.	.	.	.
c_1	=	b_1	+	$z.c_2$

Στο παράδειγμά μας:

$$p_n(x) = p_4(x) = \underset{\alpha_0}{7} + \underset{\alpha_1}{2}x + \underset{\alpha_2}{0}x^2 - \underset{\alpha_3}{2}x^3 + \underset{\alpha_4}{1}x^4$$

Για z=3:

$$b_4 = \alpha_4 = 1 \qquad c_4 = b_4 = 1$$

$$b_3 = \alpha_3 + zb_4 = 1 \qquad c_3 = b_3 + zc_4 = 4$$

$$b_2 = \alpha_2 + zb_3 = 3 \qquad c_2 = b_2 + zc_3 = 15$$

$$b_1 = \alpha_1 + zb_2 = 11 \qquad c_1 = b_1 + zc_2 = 56$$

$$b_0 = \alpha_0 + zb_1 = 40$$

Και επομένως:

$$p_4(3) = b_0 = 40 \qquad p_4'(3) = c_1 = 56$$

- Τιμή πολυωνύμου και της παραγώγου του από τους συντελεστές του
- Γενικευμένα, των παραγώγων όλων των τάξεων
- Μέθοδος Newton – Raphson : ρίζες πολυωνύμων από του συντελεστές τους
- Μέθοδος Bernoulli για την εύρεση των δύο πρώτων ριζών
- Εντοπισμός διαστημάτων ριζών πολυωνύων

Η ανάλυση γενικεύεται εάν θεωρηθούν συντελεστές Ri, τέτοιοι ώστε:

$p_n(x)$	$=$	$(x-z).q_{n-1}(x)$	$+ R_0$	$=$				
	$=$	$(x-z)^2.q_{n-2}(x)$	$+ R_1.(x-z)$	$+ R_0$	$=$			
	$=$	$(x-z)^3.q_{n-3}(x)$	$+ R_2.(x-z)^2$	$+ R_1.(x-z)$	$+ R_0$	$=$		
	$=$	$. . .$						
	$=$	$(x-z)^n.R_n$	$+ R_{n-1}.(x-z)^{n-1}$	$+ . . .$	$+ R_1.(x-z)$	$+ R_0$	$.$	

Όπου q_{n-1} είναι το πηλίκο της διαίρεσης του p_n με το (x-z),
q_{n-2} της διαίρεσης του q_{n-1} με το (x-z),
q_{n-3} της διαίρεσης του q_{n-2} με το (x-z),
κ.ο.κ.

Επειτα από i παραγωγίσεις αποδεικνύεται ότι ισχύει : $p_n(i) = i!\ R_i$

πράγμα που οδηγεί σε αλγόριθμο υπολογισμού της τιμής πολυωνύμου και όλων των παραγώγων του.

Διαμορφώνεται επομένως ένας ενιαίος αλγόριθμος, που επιτρέπει τον υπολογισμό της τιμής ενός πολυωνύμου και των παραγώγων του. Ο αλγόριθμος αυτός συνίσταται στον διαδοχικό υπολογισμό των συντελεστών b_i, c_i κ.λπ. σύμφωνα με τη διαδικασία (3.1). Θα είναι $R_0 = b_0$, $R_1 = b_1$, κ.λπ. Οι υπολογισμοί διατάσσονται όπως παρακάτω :

a_0	$b_0 = R_0$				
a_1	b_1	$c_1 = R_1$			
a_2	b_2	c_2	.		
a_3	b_3	c_3	.		
.	.	.	.		
a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	.	R_{n-1}	
a_n	b_n	c_n	.	.	R_n

Κάθε τιμή του b, και του c κ.ο.κ, προκύπτει από την τιμή που βρίσκεται από κάτω της, επί 2 (η τιμή του z), προσθέτοντας και την αριστερά επάνω τιμή, διότι $b_i=a_i+zb_{i+1}$ κ.ο.κ.

Πχ. 8*2+(-1) = 15, 15*2+2=32

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι τιμές των παραγώγων του πολυωνύμου

$p_4(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 5$ για $x = 2$.

bi

ci

α0	-5	59	$=R_0$					
α1	2	32		118	$=R_1$			
α2	-1	15		43		83	$=R_2$	
α3	2	8		14		20		26	$=R_3$
α4	3	3		3		3		3		3	$=R_4$

Σύμφωνα με την (3.5), οι τιμές των παραγώγων είναι :

$p'_4(2) = 118$

$p''_4(2) = 2 * 83 = 166$

$p'''_4(2) = 6 * 26 = 156$ και

$p^{(4)}_4(2) = 24 * 3 = 72$.

Κάθε παράγωγος, είναι το γινόμενο του αντίστοιχου R επί το i!

πχ $p''' = 3! * R_3$

Βρείτε τις τιμές των παραγώγων του πολυωνύμου $p_4(x)$, για x=3:

$$p_4(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 5$$

		b		c							
								x=	3		
a0	-5	202	=R0								
a1	0	69		273	=R1						
a2	-4	23		68		131	=R2				
a3	3	9		15		21		27	=R3		
a4	2	2		2		2		2		2	=R4

p'(3)	=	R1	=	273
p''(3)	=	2! R2	=	262
p'''(3)	=	3! R3	=	162
p''''(3)	=	4! R4	=	48

- Τιμή πολυωνύμου και της παραγώγου του από τους συντελεστές του
- Γενικευμένα, των παραγώγων όλων των τάξεων
- Μέθοδος Newton – Raphson : ρίζες πολυωνύμων από του συντελεστές τους
- Μέθοδος Bernoulli για την εύρεση των δύο πρώτων ριζών
- Εντοπισμός διαστημάτων ριζών πολυωνύων

Το σχήμα Newton-Raphson απαιτεί σε κάθε βήμα τον υπολογισμό της τιμής του πολυωνύμου και της παραγώγου του. Αλλά, σύμφωνα με τα παραπάνω η τιμή του πολυωνύμου δίνεται από την ποσότητα b_0 και η τιμή της παραγώγου από την c_1 :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{p(x_i)}{p'(x_i)} = x_i - \frac{b_0(x_i)}{c_1(x_i)}$$

Αν εφαρμοστεί η μέθοδος αυτή για τον υπολογισμό της ρίζας $\xi = 1.324718$ του πολυωνύμου $p(x) = \boxed{x^3 - x - 1}$ με αρχική τιμή $x_0 = 1.1$, τότε θα προκύψουν οι εξής διαδοχικές προσεγγίσεις :

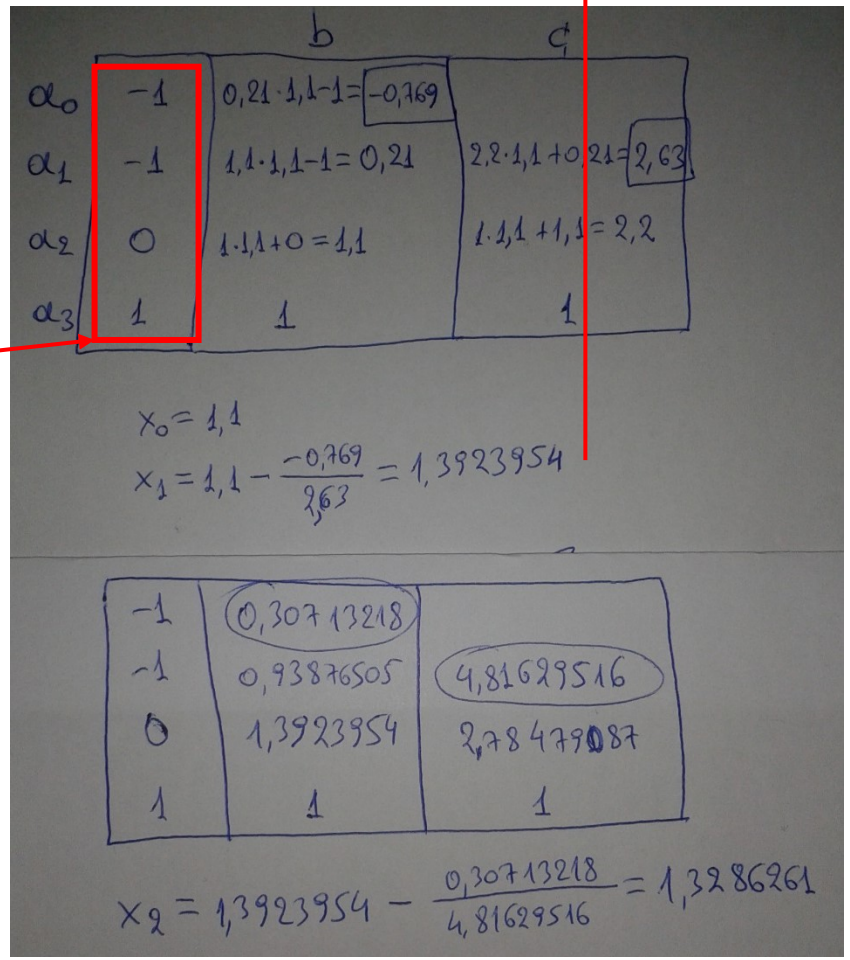
$x_1 = 1.3923954,$

$x_2 = 1.3286261,$

$x_3 = 1.3247321,$

$x_4 = 1.324718,$

$x_4 = 1.324718.$



		b	c
a_0	-1	$0{,}21 \cdot 1{,}1 - 1 = \boxed{-0{,}769}$	
a_1	-1	$1{,}1 \cdot 1{,}1 - 1 = 0{,}21$	$2{,}2 \cdot 1{,}1 + 0{,}21 = \boxed{2{,}63}$
a_2	0	$1 \cdot 1{,}1 + 0 = 1{,}1$	$1 \cdot 1{,}1 + 1{,}1 = 2{,}2$
a_3	1	1	1

$x_0 = 1{,}1$

$x_1 = 1{,}1 - \frac{-0{,}769}{2{,}63} = 1{,}3923954$

-1	$0{,}30713218$	
-1	$0{,}93876505$	$4{,}81629516$
0	$1{,}3923954$	$2{,}78479087$
1	1	1

$x_2 = 1{,}3923954 - \frac{0{,}30713218}{4{,}81629516} = 1{,}3286261$

Εφαρμόσετε τη μέθοδο Newton-Raphson για τον υπολογισμό της ρίζας του πολυωνύμου η οποία είναι ίση με ξ=4.2737487

με αρχική τιμή $x_0 = 4$

$$p_3(x) = -x^3 + 4x^2 + 5$$

a0	5	5	=R0				x0=	4	
a1	0	0		-16	=R1				
a2	4	0		-4		-8	=R2		
a3	-1	-1		-1		-1		-1	=R3
		x1=	x0-b0/c1	=4 – (-5/16) =			x1=	4.3125	
a0	5	-0.811768	=R0						
a1	0	-1.347656		-21.292969	=R1				
a2	4	-0.3125		-4.625					
a3	-1	-1		-1			x2=	4.2743763	
a0	5	-0.012935	=R0						
a1	0	-1.172787		-20.789283	=R1				
a2	4	-0.274376		-4.5487525					
a3	-1	-1		-1			x3=	4.2737541	
a0	5	-0.000111	=R0						
a1	0	-1.169958		-20.604889	=R1				
a2	4	-0.273754		-4.5475082					
a3	-1	-1		-1			x4=	4.2737487	
a0	5	-2.57E-10	=R0						
a1	0	-1.169933		-20.604794	=R1				
a2	4	-0.273749		-4.5474974					
a3	-1	-1		-1			x5=	4.2737487	

Με την 3η προσέγγιση, ακρίβεια 6 σημαντικών ψηφίων

- Τιμή πολυωνύμου και της παραγώγου του από τους συντελεστές του
- Γενικευμένα, των παραγώγων όλων των τάξεων
- Μέθοδος Newton – Raphson : ρίζες πολυωνύμων από του συντελεστές τους
- Μέθοδος Bernoulli για την εύρεση των δύο πρώτων ριζών
- Εντοπισμός διαστημάτων ριζών πολυωνύων

Μέθοδος Bernoulli για την εύρεση των δύο πρώτων ριζών πολυωνύμων

$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ με n διακεκριμένες πραγματικές ρίζες $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$

Αναλύοντας την ρητή παράσταση $R(x) - \dfrac{1}{p_n(x)}$ σε άθροισμα κλασμάτων: $R(x) = \dfrac{\alpha_1}{x-\xi_1} + \dfrac{\alpha_2}{x-\xi_2} + \ldots + \dfrac{\alpha_n}{x-\xi_n}$

Αποδεικνύεται ότι μπορούν να σχηματιστούν οι ποσότητες βi:

$$\beta_0 = 1$$
$$\beta_1 + \beta_0.a_1 = 0$$
$$\beta_2 + \beta_1.a_1 + \beta_0.a_2 = 0$$
$$\beta_3 + \beta_2.a_1 + \beta_1.a_2 + \beta_0.a_3 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Οι σειρές συνεχίζονται, αλλά ο αριθμός των όρων σταθεροποιείται σε n, αφού δεν υπάρχουν όροι a_{n+1} και άνω.

Οι οποίες επαληθεύουν την εξίσωση: $1 = (1 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots + a_n.x^n).(\beta_0 + \beta_1.x + \beta_2.x^2 + \ldots).$

Αποδεικνύεται ότι η ποσότητα: $q_k = \dfrac{\beta_k}{\beta_{k-1}}$ τείνει στο αντίστροφο της ρίζας ξ_1: $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = \dfrac{1}{\xi_1}.$

Δίνοντας τη δυνατότητα να προσδιοριστεί η ρίζα αυτή.

Μέθοδος Bernoulli για την εύρεση ριζών πολυωνύμων (συνέχεια)

Επίσης, ορίζονται οι ακολουθίες e και p: από τις οποίες η p δίνει την δυνατότητα προσδιορισμού της ρίζας ξ2

$$e_k = q_{k+1} - q_k \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{e_k}{e_{k-1}} = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

$$p_k = \frac{e_k}{e_{k-1}} q_k \qquad \lim_{k\to\infty} p_k = \frac{1}{\xi_2}$$

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι δύο πρώτες ρίζες του πολυωνύμου

$p_3(x) = -0.5x^3 + 2.75x^2 - 3.25x + 1.$

k	βk	qk	ek	pk	1/pk	1/qk			
0	1							a12	0
1	3.25	3.25	-0.84615					a11	0
2	7.8125	2.403846	-0.23385	0.664336	1.505263	0.416		a10	0
3	16.95313	2.17	-0.09143	0.848421	1.17866	0.460829		a9	0
4	35.23828	2.078571	-0.04074	0.926267	1.079602	0.4811		a8	0
5	71.80957	2.037828	-0.01926	0.963415	1.037974	0.490718		a7	0
6	144.9524	2.018566	-0.00937	0.981749	1.01859	0.495401		a6	0
7	291.2381	2.009198	-0.00462	0.990881	1.009203	0.497711		a5	0
8	583.8095	2.004578	-0.00229	0.995442	1.004579	0.498858		a4	0
9	1168.952	2.002284	-0.00114	0.997721	1.002284	0.49943		a3	-0.5
10	2339.238	2.001141	-0.00057	0.998861	1.001141	0.499715		a2	2.75
11	4679.81	2.00057	-0.00029	0.99943	1.00057	0.499858		a1	-3.25
	9360.952	2.000285	-0.00014	0.999715	1.000285	0.499929		a0	1
	18723.24	2.000142							

Προσδιορισμός των βi για n=3:

$$\beta_0 = 1$$

$$\beta_1 = -\beta_0\alpha_1$$

$$\beta_2 = -\beta_1\alpha_1 - \beta_0\alpha_2$$

$$\beta_3 = -\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2 - \beta_0\alpha_3$$

$$\beta_4 = -\beta_3\alpha_1 - \beta_2\alpha_2 - \beta_1\alpha_3$$

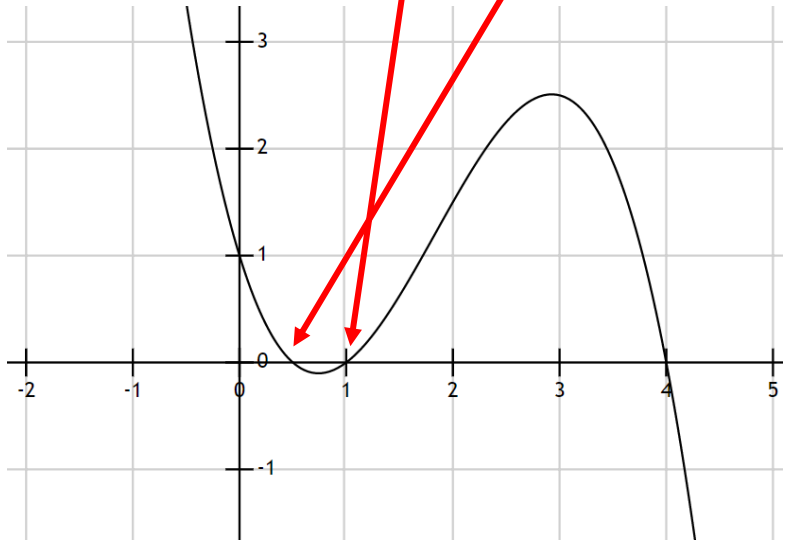
$$\beta_5 = -\beta_4\alpha_1 - \beta_3\alpha_2 - \beta_2\alpha_3 - \beta_1\cancelto{0}{\alpha_4}$$

$$\beta_6 = -\beta_5\alpha_1 - \beta_4\alpha_2 - \beta_3\alpha_3 - \beta_2\cancelto{0}{\alpha_4}$$

$$\beta_7 = -\beta_6\alpha_1 - \beta_5\alpha_2 - \beta_4\alpha_3 - \beta_3\cancelto{0}{\alpha_4}$$

για n=3:

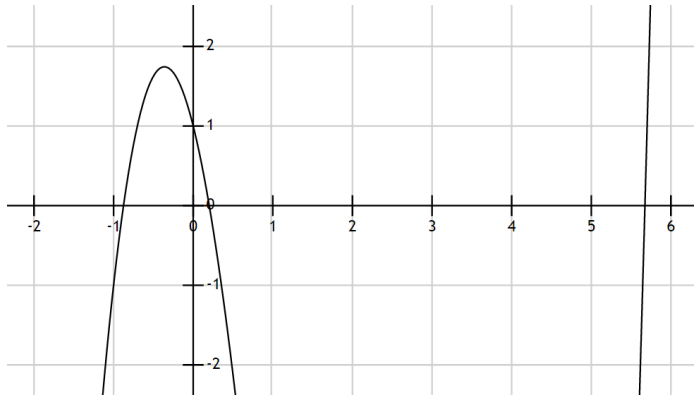
$$q_k = \frac{\beta_k}{\beta_{k-1}} \qquad e_k = q_{k+1} - q_k \qquad p_k = \frac{e_k}{e_{k-1}} q_k$$



Να βρεθούν οι δύο πρώτες ρίζες του πολυωνύμου: $p_3(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 1$
με τη μέθοδο Bernoulli

k	βk	qk	ek	pk	1/pk	1/qk
0	1					
1	4	4	1.25			
2	21	5.25	-0.44047619	-1.85	-0.540540541	0.19047619
3	101	4.80952	-0.017444602	0.19047619	5.25	0.207920792
4	484	4.79208	-0.000756894	0.207920792	4.80952381	0.208677686
5	2319	4.79132	-3.29652E-05	0.208677686	4.792079208	0.208710651
6	11111	4.79129	-1.43598E-06	0.208710651	4.791322314	0.208712087
7	53236	4.79129	-6.25523E-08	0.208712085	4.791289404	0.20871215
8	255069	4.79129	-2.72483E-09	0.208712199	4.791286772	0.208712152
9	1222109	4.79129	-1.18695E-10	0.208711784	4.791296307	0.208712153
10	5855476	4.79129	-5.17009E-12	0.208697211	4.79163088	0.208712153
11	2.8E+07	4.79129	-2.25597E-13	0.209068393	4.783123779	0.208712153
	1.3E+08	4.79129	-9.76996E-15	0.207496718	4.81935334	0.208712153
	6.4E+08	4.79129				

a12	0
a11	0
a10	0
a9	0
a8	0
a7	0
a6	0
a5	0
a4	0
a3	1
a2	-5
a1	-4
a0	1



0.2
5.67

Οι ρίζες είναι -0.9, 0.2 και 5.67, αλλά η μέθοδος δεν συγκλίνει, λόγω του ότι τα ek παίρνουν πολύ μικρές τιμές, και τα pk είναι λόγοι διαδοχικών ek.

Η σύγκλιση δεν είναι «εγγυημένη»:

$$x^2 - 2x + 1$$

k	βk	qk	ek	pk	1/pk	1/qk
0	1					
1	2	2	-0.5			
2	3	1.5	-0.167	0.5	2	0.6667
3	4	1.3333	-0.083	0.6667	1.5	0.75
4	5	1.25	-0.05	0.75	1.3333	0.8
5	6	1.2	-0.033	0.8	1.25	0.8333
6	7	1.1667	-0.024	0.8333	1.2	0.8571
7	8	1.1429	-0.018	0.8571	1.1667	0.875
8	9	1.125	-0.014	0.875	1.1429	0.8889
9	10	1.1111	-0.011	0.8889	1.125	0.9
10	11	1.1	-0.009	0.9	1.1111	0.9091
11	12	1.0909	-0.008	0.9091	1.1	0.9167
12	13	1.0833	-0.006	0.9167	1.0909	0.9231
13	14	1.0769	-0.005	0.9231	1.0833	0.9286
14	15	1.0714	-0.005	0.9286	1.0769	0.9333
15	16	1.0667	-0.004	0.9333	1.0714	0.9375
16	17	1.0625	-0.004	0.9375	1.0667	0.9412

a12	0
a11	0
a10	0
a9	0
a8	0
a7	0
a6	0
a5	0
a4	0
a3	0
a2	1
a1	-2
a0	1

Συγκλίνει πολύ αργά στην διπλή ρίζα 1, 1

$$2x^2 - 4x + 2$$

k	βk	qk	ek	pk	1/pk	1/qk
0	1					
1	4	4	-0.5			
2	14	3.5	-0.071	0.5	2	0.2857
3	48	3.4286	-0.012	0.5714	1.75	0.2917
4	164	3.4167	-0.002	0.5833	1.7143	0.2927
5	560	3.4146	-3E-04	0.5854	1.7083	0.2929
6	1912	3.4143	-6E-05	0.5857	1.7073	0.2929
7	6528	3.4142	-1E-05	0.5858	1.7071	0.2929
8	22288	3.4142	-2E-06	0.5858	1.7071	0.2929
9	76096	3.4142	-3E-07	0.5858	1.7071	0.2929
10	259808	3.4142	-5E-08	0.5858	1.7071	0.2929
11	887040	3.4142	-9E-09	0.5858	1.7071	0.2929
12	3028544	3.4142	-2E-09	0.5858	1.7071	0.2929
13	1E+07	3.4142	-3E-10	0.5858	1.7071	0.2929
14	3.5E+07	3.4142	-4E-11	0.5858	1.7071	0.2929
15	1.2E+08	3.4142	-8E-12	0.5858	1.7071	0.2929
16	4.1E+08	3.4142	-1E-12	0.586	1.7066	0.2929

a12	0
a11	0
a10	0
a9	0
a8	0
a7	0
a6	0
a5	0
a4	0
a3	0
a2	2
a1	-4
a0	2

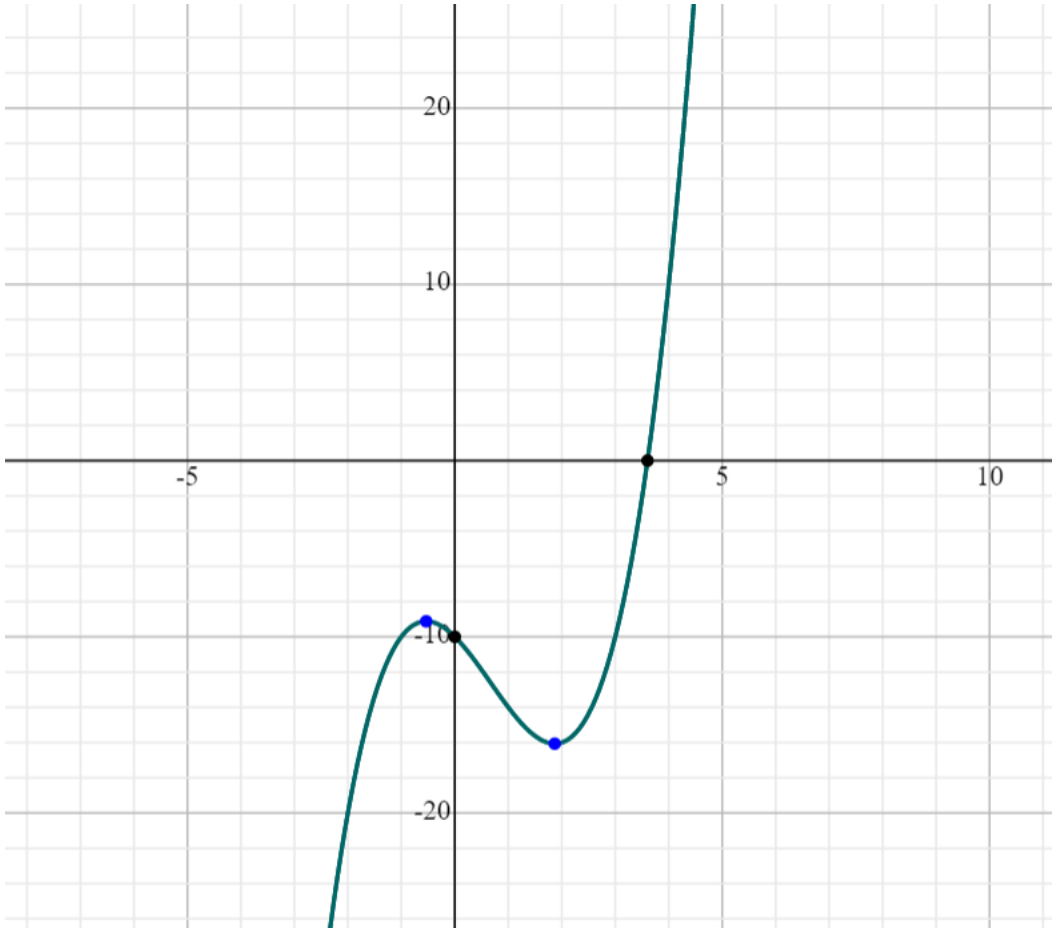
Ενώ αποκλίνει για διπλάσιους συντελεστές

Η σύγκλιση δεν είναι «εγγυημένη»:

$$x^3 - 2x^2 - 3x - 10$$

k	βk	qk	ek	pk	1/pk	1/qk
0	1					
1	3	3	0.6667			
2	11	3.6667	-0.212	-1.167	-0.857	0.2727
3	38	3.4545	0.0455	-0.74	-1.351	0.2895
4	133	3.5	-0.011	-0.868	-1.152	0.2857
5	464	3.4887	0.0027	-0.822	-1.216	0.2866
6	1620	3.4914	-6E-04	-0.839	-1.192	0.2864
7	5655	3.4907	0.0002	-0.832	-1.201	0.2865
8	19741	3.4909	-4E-05	-0.835	-1.198	0.2865
9	68913	3.4909	9E-06	-0.834	-1.199	0.2865
10	240566	3.4909	-2E-06	-0.834	-1.199	0.2865
11	839783	3.4909	5E-07	-0.834	-1.199	0.2865
12	2931568	3.4909	-1E-07	-0.834	-1.199	0.2865
13	1E+07	3.4909	3E-08	-0.834	-1.199	0.2865
14	3.6E+07	3.4909	-7E-09	-0.834	-1.199	0.2865
15	1.2E+08	3.4909	2E-09	-0.834	-1.199	0.2865
16	4.4E+08	3.4909	-4E-10	-0.834	-1.199	0.2865

a12	0
a11	0
a10	0
a9	0
a8	0
a7	0
a6	0
a5	0
a4	0
a3	1
a2	-2
a1	-3
a0	-10



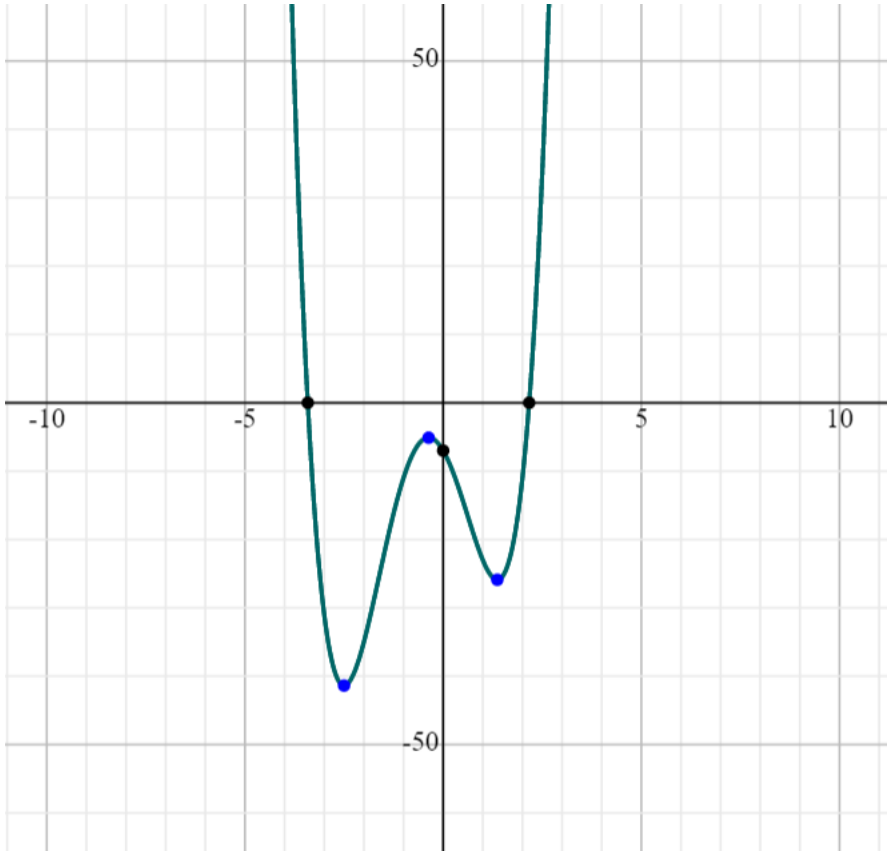
Αποκλίνει από την ρίζα 3.603

Η σύγκλιση δεν είναι «εγγυημένη»:

$$2x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 10x - 7$$

k	βk	qk	ek	pk	1/pk	1/qk
0	1					
1	10	10	1.2			
2	112	11.2	-0.164	-1.533	-0.652	0.0893
3	1236	11.036	0.0177	-1.188	-0.842	0.0906
4	13662	11.053	-0.002	-1.259	-0.794	0.0905
5	150984	11.051	0.0002	-1.233	-0.811	0.0905
6	1668616	11.052	-3E-05	-1.242	-0.805	0.0905
7	1.8E+07	11.052	3E-06	-1.238	-0.808	0.0905
8	2E+08	11.052	-3E-07	-1.239	-0.807	0.0905
9	2.3E+09	11.052	4E-08	-1.239	-0.807	0.0905
10	2.5E+10	11.052	-4E-09	-1.239	-0.807	0.0905
11	2.8E+11	11.052	4E-10	-1.239	-0.807	0.0905
12	3E+12	11.052	-5E-11	-1.239	-0.807	0.0905
13	3.4E+13	11.052	6E-12	-1.239	-0.807	0.0905
14	3.7E+14	11.052	-6E-13	-1.237	-0.808	0.0905
15	4.1E+15	11.052	7E-14	-1.218	-0.821	0.0905
16	4.5E+16	11.052	0	0	#DIV/0!	0.0905
17	5E+17	11.052	0	#DIV/0!	#DIV/0!	0.0905

a12	0
a11	0
a10	0
a9	0
a8	0
a7	0
a6	0
a5	0
a4	2
a3	4
a2	-12
a1	-10
a0	-7



Αποκλίνει από τις ρίζες -3.42, 2.17

Προσδιορισμός των εξισώσεων για n=5, και προγραμματισμός για n=3 έως 5

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
k	βk	qk	ek	pk	1/pk	1/qk			
0	1							a12	0
1	=-J13*B2	=B3/B2	=C4-C3					a11	0
2	=-B3*J13-B2*J12	=B4/B3	=C5-C4	=C4*D4/D3	=1/E4	=1/C4		a10	0
3	=-B4*J$13-B3*J$12-B2*J$11	=B5/B4	=C6-C5	=C5*D5/D4	=1/E5	=1/C5		a9	0
4	=-B5*J$13-B4*J$12-B3*J$11-B2*J$10	=B6/B5	=C7-C6	=C6*D6/D5	=1/E6	=1/C6		a8	0
5	=-B6*J$13-B5*J$12-B4*J$11-B3*J$10-B2*J$9	=B7/B6	=C8-C7	=C7*D7/D6	=1/E7	=1/C7		a7	0
6	=-B7*J$13-B6*J$12-B5*J$11-B4*J$10-B3*J$9-B2*J$8	=B8/B7	=C9-C8	=C8*D8/D7	=1/E8	=1/C8		a6	0
7	=-B8*J$13-B7*J$12-B6*J$11-B5*J$10-B4*J$9-B3*J$8	=B9/B8	=C10-C9	=C9*D9/D8	=1/E9	=1/C9		a5	0
8	=-B9*J$13-B8*J$12-B7*J$11-B6*J$10-B5*J$9-B4*J$8	=B10/B9	=C11-C10	=C10*D10/D9	=1/E10	=1/C10		a4	0
9	=-B10*J$13-B9*J$12-B8*J$11-B7*J$10-B6*J$9-B5*J$8	=B11/B10	=C12-C11	=C11*D11/D10	=1/E11	=1/C11		a3	0
10	=-B11*J$13-B10*J$12-B9*J$11-B8*J$10-B7*J$9-B6*J$8	=B12/B11	=C13-C12	=C12*D12/D11	=1/E12	=1/C12		a2	0
11	=-B12*J$13-B11*J$12-B10*J$11-B9*J$10-B8*J$9-B7*J$8	=B13/B12	=C14-C13	=C13*D13/D12	=1/E13	=1/C13		a1	0
12	=-B13*J$13-B12*J$12-B11*J$11-B10*J$10-B9*J$9-B8*J$8	=B14/B13	=C15-C14	=C14*D14/D13	=1/E14	=1/C14		a0	0
13	=-B14*J$13-B13*J$12-B12*J$11-B11*J$10-B10*J$9-B9*J$8	=B15/B14	=C16-C15	=C15*D15/D14	=1/E15	=1/C15			
14	=-B15*J$13-B14*J$12-B13*J$11-B12*J$10-B11*J$9-B10*J$8	=B16/B15	=C17-C16	=C16*D16/D15	=1/E16	=1/C16			
15	=-B16*J$13-B15*J$12-B14*J$11-B13*J$10-B12*J$9-B11*J$8	=B17/B16	=C18-C17	=C17*D17/D16	=1/E17	=1/C17			

Προσδιορισμός των βi για n=5:

$$\beta_0 = 1$$

$$\beta_1 = -\beta_0\alpha_1$$

$$\beta_2 = -\beta_1\alpha_1 - \beta_0\alpha_2$$

$$\beta_3 = -\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2 - \beta_0\alpha_3$$

$$\beta_4 = -\beta_3\alpha_1 - \beta_2\alpha_2 - \beta_1\alpha_3 - \beta_0\alpha_4$$

$$\beta_5 = -\beta_4\alpha_1 - \beta_3\alpha_2 - \beta_2\alpha_3 - \beta_1\alpha_4 - \beta_0\alpha_5$$

$$\beta_6 = -\beta_5\alpha_1 - \beta_4\alpha_2 - \beta_3\alpha_3 - \beta_2\alpha_4 - \beta_1\alpha_5 - \beta_0\alpha_6$$

$$\beta_7 = -\beta_6\alpha_1 - \beta_5\alpha_2 - \beta_4\alpha_3 - \beta_3\alpha_4 - \beta_2\alpha_5 - \beta_1\alpha_6$$

$$\beta_8 = -\beta_7\alpha_1 - \beta_6\alpha_2 - \beta_5\alpha_3 - \beta_4\alpha_4 - \beta_3\alpha_5 - \beta_2\alpha_6$$

$$q_k = \frac{\beta_k}{\beta_{k-1}}$$

$$p_k = \frac{e_k}{e_{k-1}} q_k$$

$$e_k = q_{k+1} - q_k$$

Microsoft Excel Worksheet

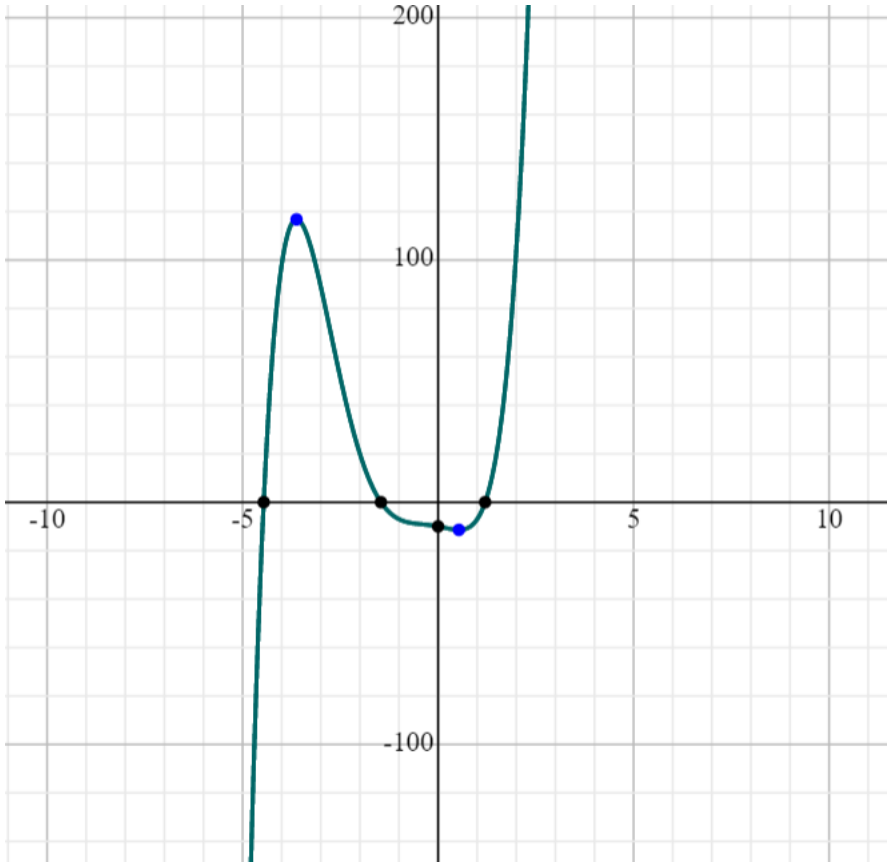
Διάφορα site για online εύρεση ριζών και γραφήματα συναρτήσεων:

https://www.symbolab.com/solver/roots-calculator

$$x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 10$$

k	βk	qk	ek	pk	1/pk	1/qk
0	1					
1	3	3	0.6666667			
2	11	3.6666667	-0.30303	-1.666667	-0.6	0.2727273
3	37	3.3636364	-0.066339	0.7363636	1.3580247	0.2972973
4	122	3.2972973	-0.002215	0.1101101	9.0818182	0.3032787
5	402	3.295082	-0.016475	24.504918	0.0408081	0.3034826
6	1318	3.278607	-0.002431	0.4837693	2.0671011	0.3050076
7	4318	3.276176	-0.001743	2.3496004	0.4256043	0.3052339
8	14139	3.2744326	-0.000863	1.6209514	0.6169216	0.3053964
9	46285	3.2735696	-0.000263	0.9970839	1.0029247	0.3054769
#	151505	3.2733067	-0.000154	1.9174391	0.5215289	0.3055015
#	495899	3.2731527	-5.88E-05	1.2495457	0.8002908	0.3055158
#	1623124	3.2730939	-2.54E-05	1.4163924	0.7060191	0.3055213
#	5312596	3.2730685	-1.18E-05	1.5137639	0.660605	0.3055237
#	17388428	3.2730567	-4.77E-06	1.3277728	0.7531409	0.3055248
#	56913228	3.2730519	-2.15E-06	1.473922	0.6784619	0.3055252
#	186279829	3.2730498	-9.25E-07	1.4089338	0.7097566	0.3055254
#	609702983	3.2730489	-3.97E-07	1.4035232	0.7124927	0.3055255
#	1.996E+09	3.2730485	-1.75E-07	1.4397253	0.694577	0.3055256

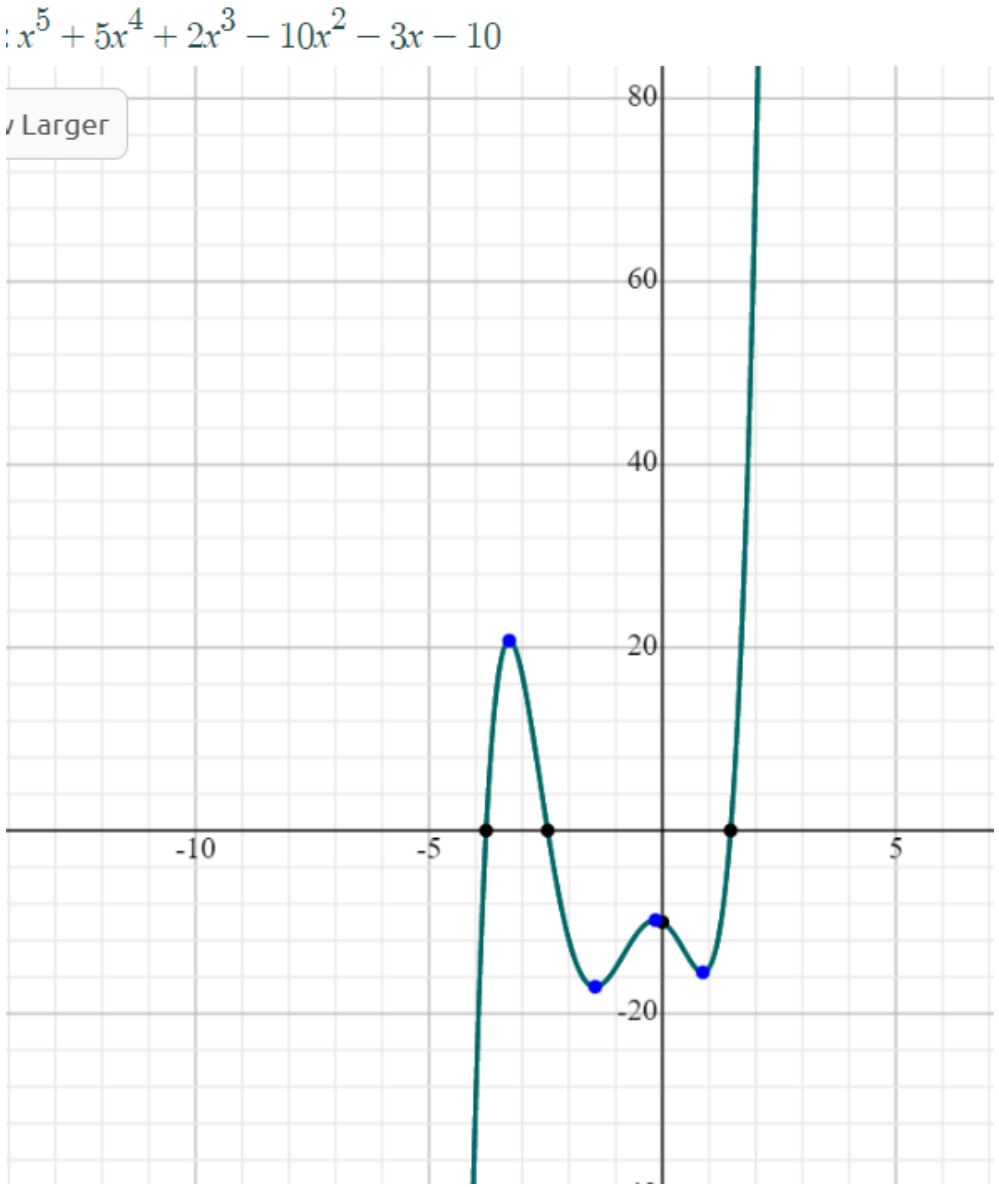
a12	**0**
a11	**0**
a10	**0**
a9	**0**
a8	**0**
a7	**0**
a6	**0**
a5	**1**
a4	**5**
a3	**2**
a2	**-2**
a1	**-3**
a0	**-10**



Αποκλίνει αργά από τις ρίζες -4.46, -1.46, 1.204

k	βk	qk	ek	pk	1/pk	1/qk
0	1					
1	3	3	3.3333333			
2	19	6.3333333	-1.859649	-3.533333	-0.283019	0.1578947
3	85	4.4736842	0.6321981	-1.520854	-0.657525	0.2235294
4	434	5.1058824	-0.271781	-2.195011	-0.455579	0.1958525
5	2098	4.8341014	0.1067947	-1.899531	-0.526446	0.2068637
6	10366	4.9408961	-0.043539	-2.014364	-0.496435	0.2023924
7	50766	4.8973567	0.0174878	-1.967052	-0.508375	0.2041918
8	249507	4.9148446	-0.007066	-1.985978	-0.50353	0.2034652
9	1224525	4.9077781	0.0028484	-1.978289	-0.505487	0.2037582
#	6013185	4.9106266	-0.001149	-1.981387	-0.504697	0.20364
#	29521595	4.9094773	0.0004636	-1.980133	-0.505017	0.2036877
#	144949284	4.9099408	-0.000187	-1.980639	-0.504887	0.2036684
#	711665300	4.9097538	7.543E-05	-1.980435	-0.50494	0.2036762
#	3.494E+09	4.9098292	-3.04E-05	-1.980517	-0.504919	0.2036731
#	1.716E+10	4.9097988	1.227E-05	-1.980484	-0.504927	0.2036743
#	8.423E+10	4.9098111	-4.95E-06	-1.980497	-0.504924	0.2036738
#	4.136E+11	4.9098061	1.997E-06	-1.980492	-0.504925	0.203674
#	2.03E+12	4.9098081	-8.06E-07	-1.980494	-0.504925	0.2036739
#	9.969E+12	4.9098073	3.249E-07	-1.980493	-0.504925	0.203674
#	4.895E+13	4.9098077	-1.31E-07	-1.980494	-0.504925	0.203674

a12	0
a11	0
a10	0
a9	0
a8	0
a7	0
a6	0
a5	1
a4	5
a3	2
a2	-10
a1	-3
a0	-10



Αποκλίνει αργά από τις ρίζες -2.45, -1.46, -3,77

- Τιμή πολυωνύμου και της παραγώγου του από τους συντελεστές του
- Γενικευμένα, των παραγώγων όλων των τάξεων
- Μέθοδος Newton – Raphson : ρίζες πολυωνύμων από του συντελεστές τους
- Μέθοδος Bernoulli για την εύρεση των δύο πρώτων ριζών
- Εντοπισμός διαστημάτων ριζών πολυωνύων

Εντοπισμός διαστήματος ριζών πολυωνύμου

Ορισμός

Το παραπάνω σύνολο ονομάζεται ***ακολουθία Sturm*** *στο διάστημα* [a, b], *αν έχει τις εξής ιδιότητες :*

(i) Η $f_0(x)$ *έχει το πολύ, απλές ρίζες στο διάστημα* [a, b].

(ii) Η $f_n(x) \neq 0$ *στο διάστημα* [a, b].

(iii) Αν $f_i(\xi) = 0$, *τότε* $f_{i-1}(\xi).f_{i+1}(\xi) < 0$ *για κάθε ρίζα* ξ *της* $f_i(x)$ *στο διάστημα* [a, b] *και για* $i = 1, 2, \ldots, n$.

(iv) Αν $f_0(\xi) = 0$, *τότε* $f_0'(\xi).f_1(\xi) > 0$ *για κάθε ρίζα* ξ *της* $f_0(x)$ *στο διάστημα* [a, b].

Για μια ακολουθία Sturm ισχύει η πρόταση :

Θεώρημα

Έστω S(x) *ο αριθμός των αλλαγών προσήμου στην ακολουθία Sturm* $\{ f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x) \}$. *Τότε ο αριθμός των ριζών της* f_0 *στο διάστημα* [a, b] *δίνεται από την διαφορά* S(a) - S(b).

Αν τώρα η f_0 είναι πολυώνυμο, τότε κατασκευάζεται ως εξής μια ακολουθία Sturm.

Έστω $f_1(x) = f_0'(x)$. Διαιρούμε την f_0 με την f_1. Προκύπτει ένα πηλίκο $\Pi_1(x)$ και ένα υπόλοιπο $-f_2(x)$. Διαιρούμε την f_1 με την f_2. Προκύπτει ένα πηλίκο $\Pi_2(x)$ και ένα υπόλοιπο $-f_3(x)$:

$$
\begin{array}{lcll}
f_0(x) & = & f_1(x).\Pi_1(x) & - \; f_2(x) \\
f_1(x) & = & f_2(x).\Pi_2(x) & - \; f_3(x) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
f_{i-1}(x) & = & f_i(x).\Pi_i(x) & - \; f_{i+1}(x) \\
f_i(x) & = & f_{i+1}(x).\Pi_{i+1}(x) & - \; f_{i+2}(x) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
f_{n-2}(x) & = & f_{n-1}(x).\Pi_{n-1}(x) & - \; f_n(x) \\
f_{n-1}(x) & = & f_n(x).\Pi_n(x) &
\end{array}
$$

<u>Διαδικασία εύρεσης διαστήματος ριζών</u>

f1 η παράγωγος της f0
f2 το υπόλοιπο της διαίρεσής τους (*(-1))
f3 το υπόλοιπο της διαίρεσης f1/f2, (*(-1)) κ.ο.κ.

Στη συνέχεια, πίνακας με τις τιμές που παίρνουν όλες οι f για δεδομένες τιμές του x.
Για κάθε τιμή του x, προκύπτει συγκεκριμένος αριθμός αλλαγών προσήμων. Όταν αλλάζει, υπάρχει ρίζα στο διάστημα.

Παράδειγμα

Έστω το πολυώνυμο $p(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 9$.

Σχηματίζεται η ακολουθία Sturm :

$f_0(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 9$, $\quad f_1(x) = 3x^2 - 12x + 3$,

$f_2(x) = 6x + 7$, $\quad f_3(x) = -\dfrac{253}{12}$.

Παρακάτω δίνεται ο πίνακας για την αλλαγή προσήμων σε διάφορα διαστήματα.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	S(x)
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-253/12$	2
0	-9	3	7	$-253/12$	2
10	421	183	67	$-253/12$	1
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-253/12$	1

$S(-\infty) - S(0) = 0$, $\quad S(10) - S(\infty) = 0$, $\quad S(0) - S(10) = 1$.

Άρα η f(x) έχει μία πραγματική ρίζα στο [0, 10].

Αριθμός αλλαγών προσήμου στην ακολουθία Sturm

x	f0(x)	f1(x)	f2(x)	f3(x)	S(x)
-15	-4779	858	-83	-253/12	2
-12	-2637	579	-65	-253/12	2
-9	-1251	354	-47	-253/12	2
-6	-459	183	-29	-253/12	2
-3	-99	66	-11	-253/12	2
0	-9	3	7	-253/12	2
3	-27	-6	25	-253/12	2
6	9	39	43	-253/12	1
9	261	138	61	-253/12	1
12	891	291	79	-253/12	1
15	2061	498	97	-253/12	1

Πιο συγκεκριμένα, η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα (3,6)

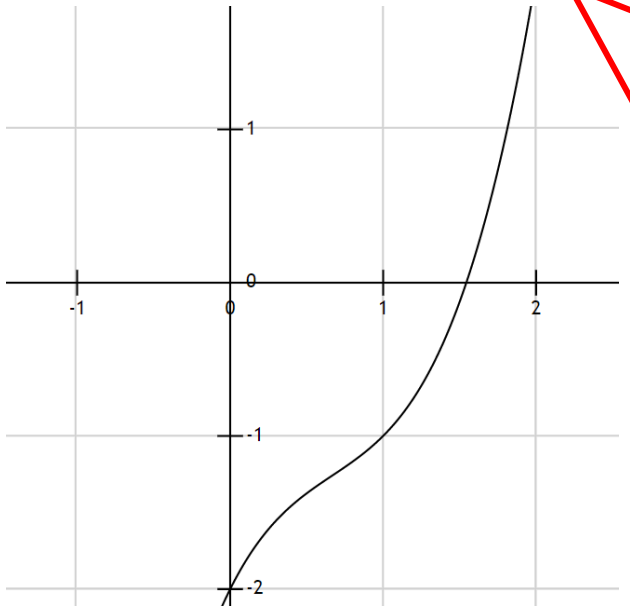
Να χρησιμοποιήσετε τη μεθοδολογία της ακολουθίας Sturm για να βρείτε σε ποιο από τα διαστήματα (0,2) και (2,4) έχει πραγματική ρίζα το πολυώνυμο: $f_0(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2$

$$f_1(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

$$f_2(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{14}{9}$$

$$f_3(x) = -\frac{99}{4}$$

x	f0	f1	f2	f3	S
0	-2	2	14/9	-99/4	2
2	2	6	6/9	-99/4	1
4	38	34	-2/9	-99/4	1



Divide $\frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 2}{3x^2 - 4x + 2}$: $\frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 2}{3x^2 - 4x + 2} = \frac{x}{3} + \frac{-\frac{2x^2}{3} + \frac{4x}{3} - 2}{3x^2 - 4x + 2}$

$$= \frac{x}{3} + \frac{-\frac{2x^2}{3} + \frac{4x}{3} - 2}{3x^2 - 4x + 2}$$

Divide $\frac{-\frac{2x^2}{3} + \frac{4x}{3} - 2}{3x^2 - 4x + 2}$: $\frac{-\frac{2x^2}{3} + \frac{4x}{3} - 2}{3x^2 - 4x + 2} = -\frac{2}{9} + \frac{\frac{4x}{9} - \frac{14}{9}}{3x^2 - 4x + 2}$

$$= \frac{x}{3} - \frac{2}{9} + \frac{\frac{4x}{9} - \frac{14}{9}}{3x^2 - 4x + 2}$$

Divide $\frac{3x^2 - 4x + 2}{-\frac{4x}{9} + \frac{14}{9}}$: $\frac{3x^2 - 4x + 2}{-\frac{4x}{9} + \frac{14}{9}} = -\frac{27x}{4} + \frac{\frac{13x}{2} + 2}{-\frac{4x}{9} + \frac{14}{9}}$

$$= -\frac{27x}{4} + \frac{\frac{13x}{2} + 2}{-\frac{4x}{9} + \frac{14}{9}}$$

Divide $\frac{\frac{13x}{2} + 2}{-\frac{4x}{9} + \frac{14}{9}}$: $\frac{\frac{13x}{2} + 2}{-\frac{4x}{9} + \frac{14}{9}} = -\frac{117}{8} + \frac{\frac{99}{4}}{-\frac{4x}{9} + \frac{14}{9}}$

$$= -\frac{27x}{4} - \frac{117}{8} + \frac{\frac{99}{4}}{-\frac{4x}{9} + \frac{14}{9}}$$

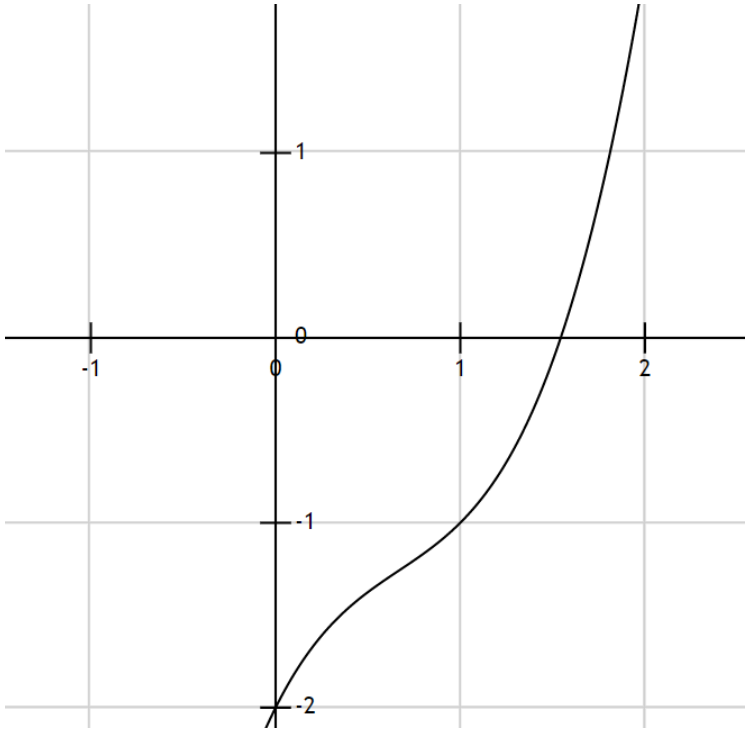
Να χρησιμοποιήσετε τη μεθοδολογία της ακολουθίας Sturm για να βρείτε σε ποιο από τα διαστήματα (0,2) και (2,4) έχει πραγματική ρίζα το πολυώνυμο: $f_0(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 2$

$$f_1(x) = 3x^2 - 4x + 2$$

$$f_2(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{14}{9}$$

$$f_3(x) = -\frac{99}{4}$$

x	f0	f1	f2	f3	S
0	-2	2	14/9	-99/4	2
2	2	6	6/9	-99/4	1
4	38	34	-2/9	-99/4	1



$$x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \quad \Big| \quad 3x^2 - 4x + 2$$

$$-x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{3}x \quad \Big| \quad \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 2$$

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{9}x - \frac{14}{9}$$

Άρα $f_2(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{14}{9}$

$$3x^2 - 4x + 2 \quad \Big| \quad -\frac{4}{9}x + \frac{14}{9}$$

$$-3x^2 + \frac{21}{2}x \quad \Big| \quad -\frac{27}{4}x - \frac{117}{8}$$

$$\frac{13x}{2} + 2$$

$$-\frac{13x}{2} + \frac{91}{4}$$

$$\frac{99}{4}$$

Άρα $f_3(x) = -99/4$

Ευχαριστώ για την προσοχή σας !