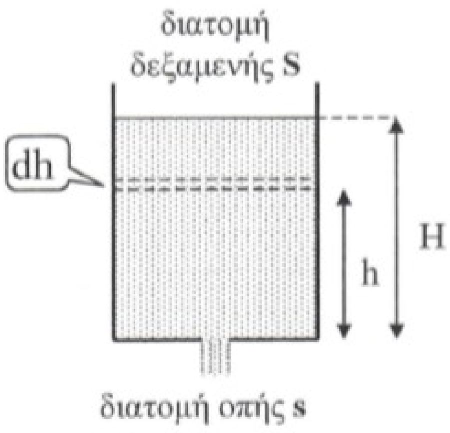
Εφαρμοσμένη Υδραυλική

- Ροή σε συνθήκες μεταβλητού φορτίου

Στα προβλήματα που έχουν εξεταστεί μέχρι τώρα η κίνηση του νερού θεωρήθηκε μόνιμη. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις κατά τις οποίες η ροή μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου, είναι δηλαδή μη μόνιμη, και παρόλα αυτά η επιτάχυνση του ρευστού είναι αμελητέα. Η ροή χαρακτηρίζεται ως **σχεδόν μόνιμη (quasi-steady).** Συνήθως μπορεί να δοθεί κάποια λύση αν για μία στοιχειώδη χρονική στιγμή dt θεωρήσουμε το φαινόμενο μόνιμο, επομένως την ταχύτητα του νερού και την παροχή σταθερές, και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε τη σχέση στην οποία καταλήγουμε.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το χρόνο που απαιτείται για να αδειάσει η δεξαμενή του σχήματος από μια οπή η οποία βρίσκεται στη βάση της.



Κατά τη χρονική στιγμή t το φορτίο που προκαλεί τη ροή είναι h, η παροχή της οπής Q (θεωρείται σταθερή) και η διατομή της δεξαμενής S. Τη χρονική στιγμή t + dt η στάθμη της δεξαμενής έχει πέσει κατά dh. Η μείωση επομένως του νερού της δεξαμενής οφείλεται στον όγκο που βγήκε από την οπή κατά το χρόνο dt. Άρα θα έχουμε

Τελικός όγκος δεξαμ. - αρχικός όγκος δεξαμ. = Παροχή οπής * (τελικό χρόνο - αρχικό χρόνο)

$$\Rightarrow S.(h - dh) - S.h = Q.[(t + dt) - t] \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{- S.dh = Q.dt} \;. \qquad (8.49)$$

Η σχέση αυτή εφαρμόζεται σε όλα τα προβλήματα εκκένωσης δεξαμενών αφού η παροχή Q (οπής ή αγωγού) και η διατομή S της δεξαμενής (σταθερή ή μεταβαλλόμενη) εκφραστούν συναρτήσει του φορτίου h.

Να υπολογιστεί η αρχική στάθμη της δεξαμενής του προηγούμενου σχήματος, αν έχουν διαρρεύσει στην ατμόσφαιρα 2.8 m^3 σε χρόνο $T = 395$ sec. Η δεξαμενή είναι κυλινδρική με διάμετρο $D = 1.8$ m και η κυκλικής διατομής οπή έχει διάμετρο $d = 50$ mm. Συντελεστής παροχής της οπής $C_d = 0.6$.

Λύση.

Η διατομή S της δεξαμενής είναι $S = \dfrac{\pi.D^2}{4}$

η ταχύτητα του νερού που βγαίνει από την οπή (σχέση (5.3)) $v = \sqrt{2g.h}$

και η παροχή της οπής

$$Q = C_d \frac{\pi.d^2}{4}.v = C_d \frac{\pi.d^2}{4}\sqrt{2g.h} .$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (8.49) έχουμε

$$-S.dh = Q.dt \Rightarrow -\frac{\pi D^2}{4}.dh = C_d.\frac{\pi.d^2}{4}.\sqrt{2g.h}.dt \Rightarrow dt = -\frac{D^2}{C_d.d^2.\sqrt{2g}}.h^{-1/2}.dh$$

και ολοκληρώνοντας από $H_{αρχικό}$ μέχρι $H_{τελικό}$

$$\int_0^T dt = -\frac{D^2}{C_d.d^2.\sqrt{2g}}\int_{H_{αρχ}}^{H_{τελ}} h^{-1/2}.dh \Rightarrow T = \frac{2D^2}{C_d.d^2\sqrt{2g}}(H_{αρχ}{}^{1/2} - H_{τελ}{}^{1/2}) .$$

Επομένως μετά τις πράξεις

$$H_{αρχ}{}^{1/2} - H_{τελ}{}^{1/2} = 0.404 \Rightarrow H_{τελ}{}^{1/2} = H_{αρχ}{}^{1/2} - 0.404 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{τελ} = H_{αρχ} - 0.808 H_{αρχ}{}^{1/2} + 0.163. \qquad \text{(σχέση A)}$$

Εφόσον όμως έχουν διαρρεύσει 2.8 m^3

$$H_{αρχ} - H_{τελ} = \frac{V}{S} = \frac{\text{ογκος νερου}}{\text{επιφανεια δεξαμενης}} = \frac{2.8}{\frac{\pi.D^2}{4}} = 1.1 \text{ m} .$$

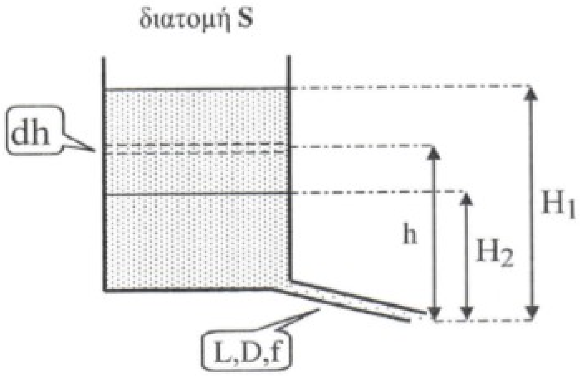
(σχέση Β)

Αντικατάσταση του $H_{τελ}$ από τη σχέση Α στη σχέση Β δίνει τελικά μετά τις πράξεις

$$\mathbf{H_{αρχ} = 2.45\ m}.$$

Κυλινδρική δεξαμενή διαμέτρου D = 0.9 m, αδειάζει από σωλήνα μήκους L = 3.6 m, διαμέτρου d = 50 mm και συντελεστή τριβής f = 0.04. Η έξοδος από τη δεξαμενή στον αγωγό είναι απότομη (k_L = 0.5). Να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται, ώστε να πέσει το φορτίο πάνω από το σημείο εξόδου του νερού, από τα 2.4 m στα 1.2 m.

Λύση.



Σε κάποια **τυχαία** χρονική στιγμή t, το φορτίο που προκαλεί την κίνηση του νερού είναι h. Εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli ανάμεσα στην ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής και το σημείο εξόδου του νερού στην ατμόσφαιρα έχουμε

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{2g} + f\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{2g}.h^{1/2}}{\sqrt{1.5+f\frac{L}{d}}}.$$

Από την (8.49) έχουμε

$$-S.dh = Q.dt \Rightarrow -\frac{\pi.D^2}{4}.dh = \frac{\pi.d^2}{4}.v.dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi.D^2}{4}.dh = \frac{\pi d^2}{4}\frac{\sqrt{2g}\ h^{1/2}}{\sqrt{1.5+f\frac{L}{d}}}.dt \Rightarrow dt = -\frac{D^2\sqrt{1.5+f\frac{L}{d}}\ h^{-1/2}}{d^2\sqrt{2g}}dh.$$

Ολοκληρώνοντας από $h = H_1$ έως $h = H_2$

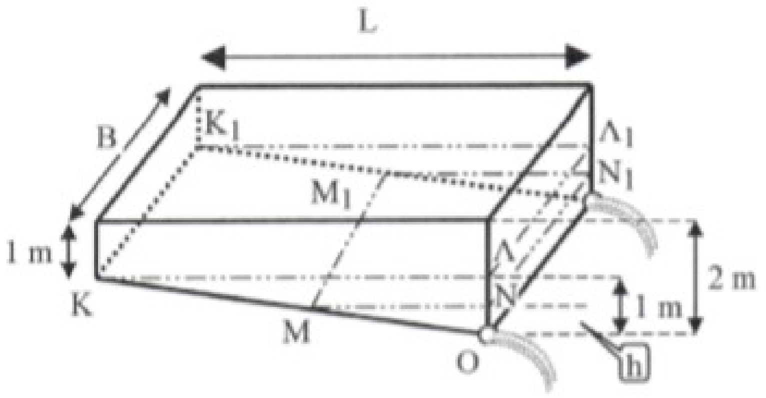
$$T = -\frac{D^2\sqrt{1.5+f\frac{L}{d}}}{d^2\sqrt{2g}}\int_{H_1}^{H_2} h^{-1/2}dh = \frac{2D^2\sqrt{1.5+f\frac{L}{d}}}{d^2\sqrt{2g}}(H_1^{1/2} - H_2^{1/2}).$$

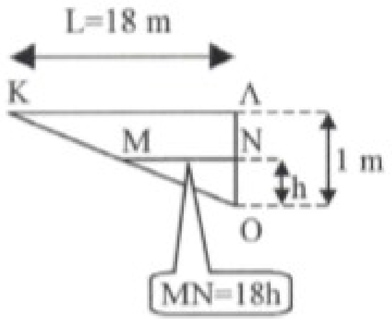
Έτσι τελικά για D = 0.9 m, L = 3.6 m, d = 0.05 m, f = 0.04, H_1 = 2.4 m και H_2 = 1.2 m έχουμε **T = 139 sec.**

Πισίνα ορθογωνικής διατομής έχει μήκος L = 18 m και πλάτος B = 9 m. Το βάθος της αυξάνει ομοιόμορφα από 1 m στο ένα άκρο της μέχρι 2 m στο άλλο. Να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται για να αδειάσει, από δύο οπές διαμέτρου d = 150 mm.

Λύση.

Η στάθμη του νερού της πισίνας έχει σταθερή ορθογωνική διατομή και ίση με $S_1 = B * L$, μέχρι το επίπεδο $ΚΛΛ_1Κ_1$. Όταν η στάθμη πέσει κάτω από αυτό, η διατομή είναι ορθογωνική αλλά όχι σταθερή και σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή t είναι ίση με $S_2 = NN_1 * MN = B * MN$.





Από τα όμοια τρίγωνα ΟΚΛ και ΟΜΝ φαίνεται ότι

$ΚΛ = L = 18$ m, $ΛΟ = 1$ m, $ΟΝ = h$, $MN = 18\,h$.

Επομένως $S_2 = B * 18h$.

Από την εξίσωση (8.49) και για δύο οπές έχουμε

$$-S.dh = 2Q.dt \Rightarrow -S.dh = 2\frac{\pi.d^2}{4}.\sqrt{2g.h}.dt \Rightarrow$$

$$dt = -S.\frac{2}{\pi d^2\sqrt{2g}}h^{-1/2}.dh \Rightarrow$$

$$T = -\frac{2}{\pi.d^2\sqrt{2g}}\left(\int_2^1 S_1.h^{-1/2}.dh + \int_1^0 S_2.h^{-1/2}.dh\right) \Rightarrow$$

$$T = -\frac{2}{\pi d^2\sqrt{2g}}\left(\int_2^1 B.L.h^{-1/2}.dh + \int_1^0 B.18h.h^{-1/2}.dh\right) \Rightarrow$$

$$T = -\frac{2B}{\pi.d^2\sqrt{2g}}\left(2L.h^{1/2}\Big|_2^1 + 18*\frac{2}{3}h^{3/2}\Big|_1^0\right) \Rightarrow$$

$$T = -\frac{2B}{\pi.d^2\sqrt{2g}}\left[2L.(1^{1/2} - 2^{1/2}) + 12(0 - 1^{3/2})\right] \Rightarrow$$

T = 1547 sec.