Συστήματα δεξαμενών και αγωγών

- Προβλήματα συνδεδεμένων δεξαμενών
  - Εξίσωση Bernoulli, γραμμικές και τοπικές απώλειες, αντλίες, στρόβιλοι (ο τρόπος εφαρμογής τους ήδη γνωστός)
  - Επιπλέον: μετασχηματισμός της εξίσωσης Darcy-Weisbach (γραμμικών απωλειών) σε συνάρτηση με την παροχή αντί την ταχύτητα:

$$\Delta \mathrm{h} = \mathrm{f}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{8}{g\pi^2}\frac{fL}{D^5}Q^2 = \frac{fL}{12.1 * D^5}Q^2 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{D^5}{12.1fL}}\sqrt{\Delta \mathrm{h}}$$

  - Προβλήματα με πολλαπλές δεξαμενές και πολλαπλούς αγωγούς
- Μέθοδος Hardy – Cross για τον υπολογισμό δικτύου ύδρευσης

Μετασχηματισμός της σχέσης των γραμμικών απωλειών – συνάρτηση της παροχής αντί της ταχύτητας

$$\Delta\mathrm{h} = \mathrm{f}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{8}{g\pi^2}\frac{fL}{D^5}Q^2 = \frac{fL}{12.1 * D^5}Q^2 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{D^5}{12.1fL}}\sqrt{\Delta\mathrm{h}}$$

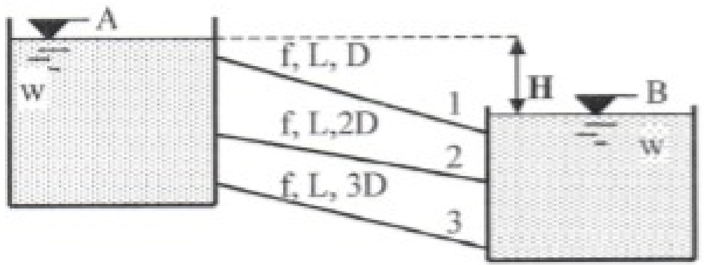
Ορίζοντας την «αντίσταση» του αγωγού: $R = \frac{8}{g\pi^2}\frac{fL}{D^5} = \frac{fL}{12.1 * D^5}$

$$\Delta\mathrm{h} = \mathrm{R}Q^2 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{1}{R}}\sqrt{\Delta\mathrm{h}}$$

1

Δύο δεξαμενές Α, Β συνδέονται από τρεις αγωγούς, παράλληλους μεταξύ τους, ιδίου μήκους L και διαμέτρων αντίστοιχα D, 2D και 3D. Θεωρώντας τον συντελεστή απωλειών f ίδιο για όλους τους αγωγούς, να υπολογιστούν οι παροχές των δύο μεγαλύτερων αγωγών, αν η παροχή που περνά από τον μικρότερο είναι $Q_1 = 0.03$ m³/sec. Να αγνοηθούν οι τοπικές απώλειες.

Λύση. Οι πιέσεις στην είσοδο και έξοδο κάθε αγωγού δεν επηρεάζονται από τη ροή μέσα στους άλλους και έτσι ο αγωγός εξετάζεται ανεξάρτητα από αυτούς χρησιμοποιώντας το ίδιο διαθέσιμο ολικό φορτίο σε κάθε περίπτωση.



Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli για κάθε έναν από τους αγωγούς θα έχουμε από τη σχέση (8.40)

$$H = f\frac{L_1.Q_1^{\ 2}}{12D_1^{\ 5}} = f\frac{L_2.Q_2^{\ 2}}{12D_2^{\ 5}} = f\frac{L_3.Q_3^{\ 2}}{12D_3^{\ 5}}.$$

Για $Q_1 = 0.03$ m³/sec, $L = L_1 = L_2 = L_3$,

$D_1 = D, D_2 = 2D, \ D_3 = 3D$,

η παραπάνω σχέση γίνεται $\dfrac{(0.03)^2}{D^5} = \dfrac{Q_2^{\ 2}}{(2D)^5} = \dfrac{Q_3^{\ 2}}{(3D)^5}$

και επομένως

$$Q_2 = 0.03 * \sqrt{32} = 0.170 \text{ m}^3/\text{sec} \quad \text{και } Q_3 = 0.03 * \sqrt{243} = 0.459 \text{ m}^3/\text{sec}.$$

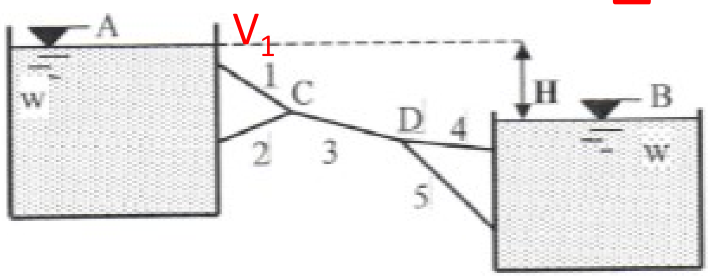
η πιεζομετρική γραμμή είναι ανεξάρτητη από την διαδρομή

Αν η ταχύτητα του νερού στον αγωγό 1 του σχήματος είναι 1 m/sec, να υπολογιστεί η παροχή Q του συστήματος και η διαφορά στάθμης H των δύο δεξαμενών. Δίνεται το f = 0.02 για όλους τους αγωγούς, καθώς και τα γεωμετρικά τους στοιχεία. Να αγνοηθούν οι τοπικές απώλειες.

Αγωγός	Μήκος L(m)	Διάμετρος D(mm)
1	300	200
2	300	300
3	300	500
4	600	300
5	800	300

Λύση.

2



Σειρά υπολογισμών: απώλειες και παροχή του αγωγού 1, Ταχύτητα και παροχή του 2, συνολική παροχή και απώλειες του 3, σχέση ταχυτήτων 4 και 5, από την παροχή των 4 και 5 και τη σχέση ταχυτήτων, ταχύτητα 5, απώλειες 5, σύνολο απωλειών = διαφορά στάθμης

$$h_1 = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0.02\frac{300}{0.2}\frac{1^2}{2*9.81} = 1.529m \qquad Q_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = 0.031\frac{m}{s^3}$$

$$h_1 = h_2 = 1.529m = 0.02\frac{300}{0.3}\frac{V_2^2}{2*9.81} \Rightarrow V_2 = 1.225\frac{m}{s}$$

$$Q_2 = \frac{\pi 0.3^2}{4}1.225 = 0.087\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$$

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = 0.031 + 0.087 = 0.118\frac{m^3}{s} = Q_4 + Q_5$$

$$h_3 = f\frac{L_3 Q_3^2}{12 D_3^5} = 0.02\frac{300 * 0.118^2}{12 * 0.5^5} = 0.221m$$

$$h_4 = h_5 \Rightarrow 0.02\frac{600V_4^2}{0.3*2g} = 0.02\frac{800V_5^2}{0.3*2g} \Rightarrow V_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}V_5 \qquad (1)$$

$$Q_4 + Q_5 = 0.118 \Rightarrow \frac{\pi 0.3^2}{4}V_4 + \frac{\pi 0.3^2}{4}V_5 = 0.118 \underset{(1)}{\Rightarrow} V_5 = 0.775m/s$$

$$h_5 = f\frac{L_5 V_5^2}{D_5 2g} = 0.02\frac{800}{0.3} * \frac{0.775^2}{2g} = 1.631m$$

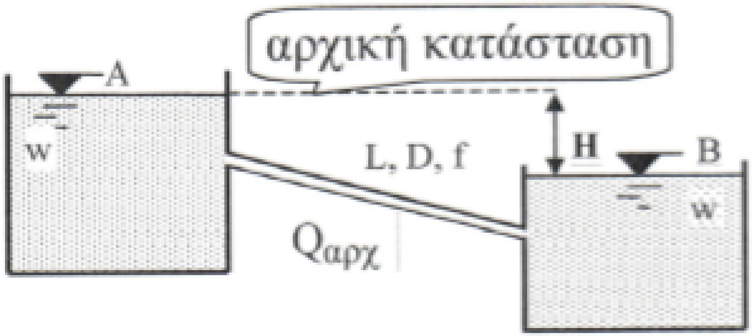
$$h = h_1 + h_3 + h_5 = 1.529 + 0.221 + 1.631 = 3.381m$$

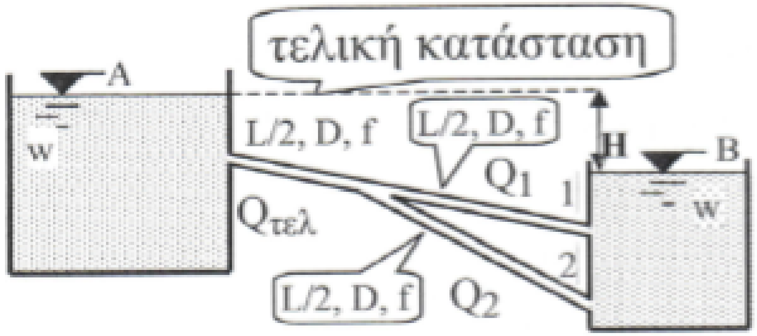
η πιεζομετρική γραμμή είναι ανεξάρτητη από την διαδρομή

Αγωγός συνδέει δύο δεξαμενές Α και Β. Να υπολογιστεί η επί % αύξηση της παροχής, αν από το μέσο του αγωγού και για το υπόλοιπο μήκος του, συνδεθεί σε παράλληλη διάταξη άλλος αγωγός ιδίας διαμέτρου. Συντελεστής απωλειών f όμοιος για όλους τους σωλήνες. Δεν υπάρχουν τοπικές απώλειες.

3

Λύση.





Μετά τη σύνδεση του νέου αγωγού (τελική κατάσταση), οι αγωγοί 1 και 2 είναι παράλληλα μεταξύ τους (επομένως $h_1 = h_2$) και επειδή έχουν ίδια γεωμετρικά στοιχεία θα ισχύει προφανώς

$$Q_1 = Q_2 .$$

Παίρνοντας υπόψη μας και την εξίσωση συνέχειας

$$Q_1 = Q_2 = Q = Q_{τελ}/2 .$$

Η εξίσωση Bernoulli για τις δεξαμενές Α και Β δίνει

αρχικά $$H = f\frac{L.Q_{αρχικη}^{\ 2}}{12D^5} ,$$

τελικά $$H = f\frac{(L/2)Q_{τελικη}^{\ 2}}{12D^5} + f\frac{(L/2)Q^2}{12D^5}$$

Εξισώνοντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε

$$Q_{αρχ}^{\ 2} = \frac{1}{2}\left(Q_{τελ}^{\ 2} + Q^2\right) \text{ και επειδή } Q = Q_{τελ}/2$$

$$2Q_{αρχ}^{\ 2} = Q_{τελ}^{\ 2} + \frac{Q_{τελ}^{\ 2}}{4} \Rightarrow \frac{Q_{τελ}}{Q_{αρχ}} = \sqrt{\frac{8}{5}} = 1.265$$

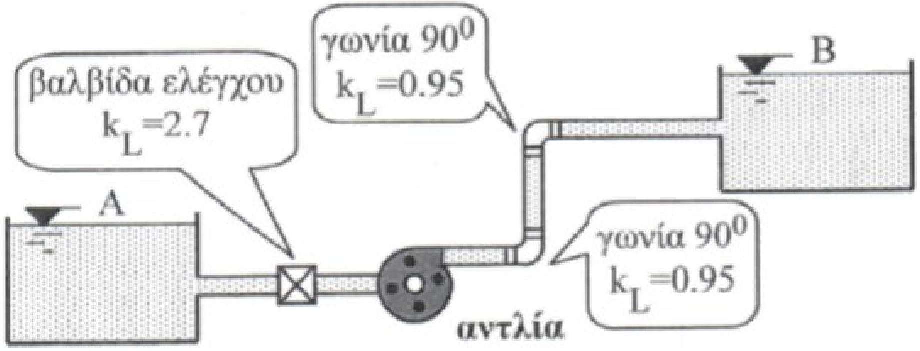
Άρα η αύξηση της παροχής είναι **26.5 %** .

Για τη διάταξη του σχήματος να υπολογιστεί το απαιτούμενο φορτίο της αντλίας ώστε να μεταφερθούν 0.0056 m^3/s από τη δεξαμενή A στη B μέσω αγωγού μήκους 120 m, διαμέτρου 7 cm και συντελεστή $f = 0.0216$. Δίνονται $z_A = 7$ m, $z_B = 40$ m.

4

Λύση

Οι αντλίες είναι μηχανήματα με τα οποία μπορούμε να μεταφέρουμε ποσότητα ρευστού από μια θέση με μικρό φορτίο σε μία άλλη με μεγαλύτερο.



$$v = \frac{Q}{\frac{\pi . D^2}{4}} = \frac{4 * 0.0056}{\pi * 0.07^2} = 1.455 \, m/s \, .$$

$$H_A = H_B + h_{\gamma\rho\alpha\mu\mu\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma} + h_{\tau o\pi\iota\kappa\acute{\varepsilon}\varsigma} - h_{\alpha\nu\tau\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma} \Rightarrow$$

$$h_{\alpha\nu\tau\lambda} = z_B - z_A + \frac{v^2}{2g}\left(\frac{f.L}{D} + \sum k_L\right) \Rightarrow$$

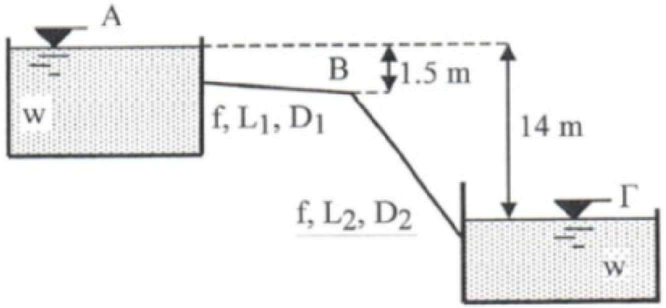
$$h_{\alpha\nu\tau\lambda} = 40 - 7 + \frac{1.455^2}{2 * 9.81}\left(\frac{0.0216 * 120}{0.07} + 2.7 + 0.95 + 0.95\right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{h_{\alpha\nu\tau\lambda} = 37.49 \, m} \, .$$

Δύο δεξαμενές Α και Γ με διαφορά στάθμης 14 m συνδέονται από αγωγό ΑΒΓ συνολικού μήκους 3050 m. Το τμήμα ΑΒ έχει διάμετρο $D_1 = 20$ cm, το τμήμα ΒΓ διάμετρο $D_2 = 15$ cm και ο συντελεστής απωλειών είναι $f = 0.02$. Αν το σημείο Β βρίσκεται 1.5 m χαμηλότερα από τη στάθμη της δεξαμενής Α, και η πίεση σ' αυτό είναι 3 m μικρότερη της ατμοσφαιρικής, να υπολογιστούν τα μήκη ΑΒ, ΒΓ καθώς και η παροχή.

5

Λύση.



Η εξίσωση της συνέχειας στο σημείο Β δίνει:

$$\frac{\pi . D_1^2}{4} . v_1 = \frac{\pi . D_2^2}{4} . v_2 \Rightarrow v_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 v_1 = \frac{16}{9} v_1 \, .$$

Επίσης $L_1 + L_2 = 3050 \Rightarrow \quad L_2 = 3050 - L_1$.

Η εξίσωση Bernoulli ανάμεσα στις δεξαμενές Α και Γ δίνει

$$H_A - H_\Gamma = f\frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} + f\frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g} = f\frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} + f\frac{(3050-L_1)}{D_2}\frac{\left(\frac{16}{9}v_1\right)^2}{2g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 = \frac{v_1^2}{2g}\left[f\frac{L_1}{D_1} + f\left(\frac{16}{9}\right)^2\frac{3050-L_1}{D_2}\right]. \qquad \text{(Σχεση Α)}$$

Η εξίσωση Bernoulli ανάμεσα στα Α και Β δίνει

$$z_A + \frac{p_A}{w} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{w} + \frac{v_B^2}{2g} + f\frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} \, .$$

Αλλά

$z_A - z_B = 1.5$ m, $\quad p_A = 0, \quad v_A = 0, \quad p_B/w = -3$ m, $\quad v_B = v_1$.

Επομένως η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$(z_A - z_B) - \frac{p_B}{w} = 4.5 = \frac{v_1^2}{2g}\left(1 + f\frac{L_1}{D_1}\right). \qquad \text{(σχέση Β)}$$

Διαίρεση των σχέσεων Α και Β κατά μέλη οδηγεί σε μία εξίσωση με έναν άγνωστο, το μήκος L_1.

Έτσι τελικά $L_1 = 2032$ m και στη συνέχεια υπολογίζονται τα L_2 και Q.

Ασκήσεις τριών δεξαμενών

Το γενικό πρόβλημα των τριών δεξαμενών, οι οποίες συνδέονται με αγωγούς που διέρχονται από κόμβο

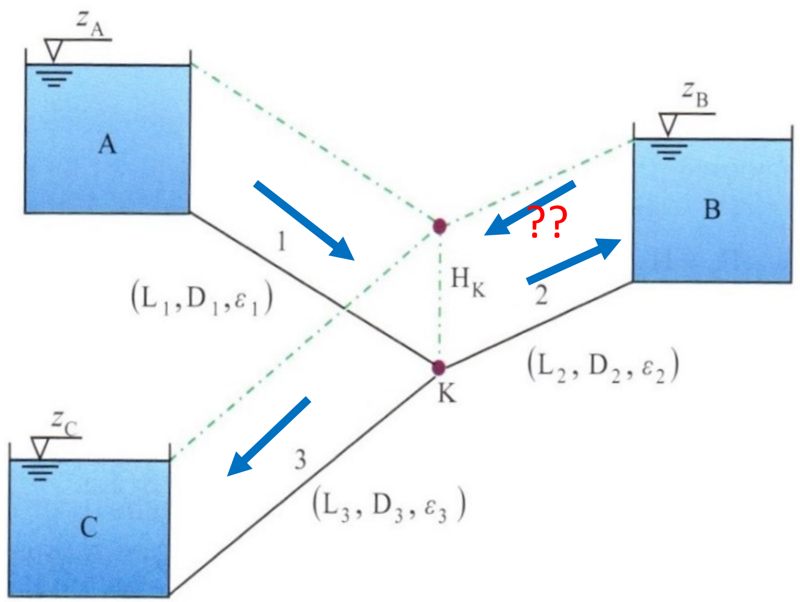
Λύση συστήματος 4 εξισώσεων, με 4 αγνώστους: Q_1, Q_2, Q_3 και H_K.

Διακρίνονται 3 πιθανές περιπτώσεις: HK=HB, HK<HB, HK>HB

Θεωρούμε ότι οι δεξαμενές έχουν ονομαστεί έτσι ώστε: $H_C<H_B<H_A$ δηλαδή $z_C<z_B<z_A$. Ωστόσο, η φορά στον 2 είναι άγνωστη.
Διερευνούμε την τιμή του φορτίου στον Κ, διότι καθορίζει αυτήν την φορά.
Για την διερεύνηση, υποθέτουμε ότι $H_K=H_B$ και προσδιορίζουμε Q_1 και Q_3. Εάν $Q_1=Q_3$, ισχύουν οι παροχές, και $Q_3=0$.
Εάν $Q_1>Q_3$, αυξάνουμε το H_K, πράγμα που θα μειώσει την Q_1 και θα αυξήσει την Q_3. Ισχύει η περίπτωση 2.
Εάν $Q_1<Q_3$, μειώνουμε το H_K, γιατί το πρόβλημα εμπίπτει στην περίπτωση 3, δηλαδή ρέει νερό ΑΠΌ και όχι ΠΡΟΣ την δεξαμενη Β.

Περίπτωση 2

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$
$$H_A - H_K = R_1 Q_1^2$$
$$H_K - H_B = R_1 Q_2^2$$
$$H_K - H_C = R_1 Q_3^2$$

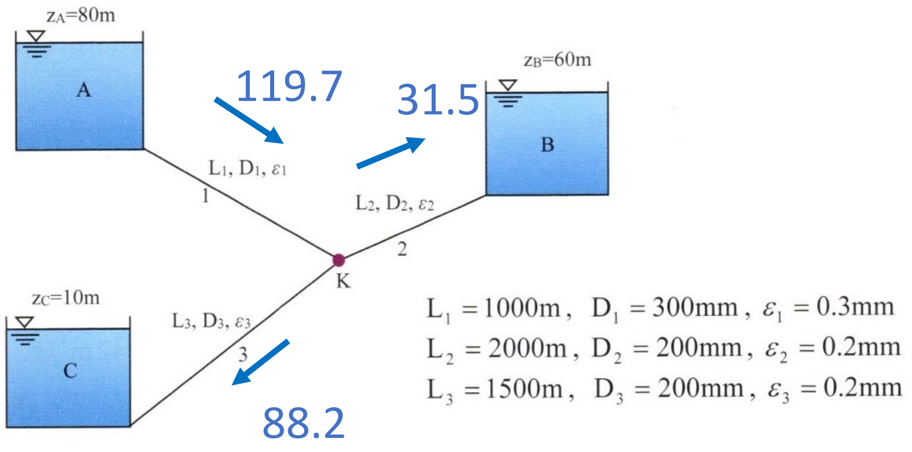


Περίπτωση 3

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$
$$H_A - H_K = R_1 Q_1^2$$
$$H_B - H_K = R_1 Q_2^2$$
$$H_K - H_C = R_1 Q_3^2$$

Λύση του μη-γραμμικού συστήματος 2 ή 3 ανάλογα με την περίπτωση

Ασκηση 3 δεξαμενών (από: Λιακόπουλος Α. «Υδραυλική», 2020).



Επίλυση προβλήματος τριών δεξαμενών για τυρβώδη ροή

Α. Στοιχεία των αγωγών και του ιξώδους σε συνάρτηση με την θερμοκρασία

0.2479	-0.0000947	3.615	7.366
Μην τροποποιείτε τους αριθμούς			
			12.1026

i	L	D	e	e/D	v
1	1000	0.3	0.0003	0.001	0.00000113
2	2000	0.2	0.0002	0.001	
3	1500	0.2	0.0002	0.001	

(δίνεται είτε το e, είτε το e/D απευθείας)

Β. Διερεύνηση της παροχής του αγωγού 2 (εάν είναι από, ή προς την δεξαμενή Β), μέσω της υπόθεσης ΗΚ=ΗΒ

Δοκιμή ΗΚ=ΗΒ: Εύρεση των παροχών Q1 και Q3 μέσω solver, ελαχιστοποιώντας το DIFF, ξεχωριστά για την καθεμία

i	H	Hi-HK	Q	V	v	Re	nom	denom	f	Δh	DIFF
1	80	20	0.170782	2.4161	0.00000113	641436.388	0.24770827	12.28322	0.0201664	19.99999	1.18E-05
2	60	0			0.00000113						
3	10	50	0.079594	2.5336	0.00000113	448419.235	0.24758702	12.15026	0.0203771	50.00001	-1E-05
K	60				.						

Αποτέλεσμα δοκιμής: Q1 > Q3 οπότε μηδενίζουμε F19, αλλιώς Q1+Q2=Q3 και μηδενίζουμε I19

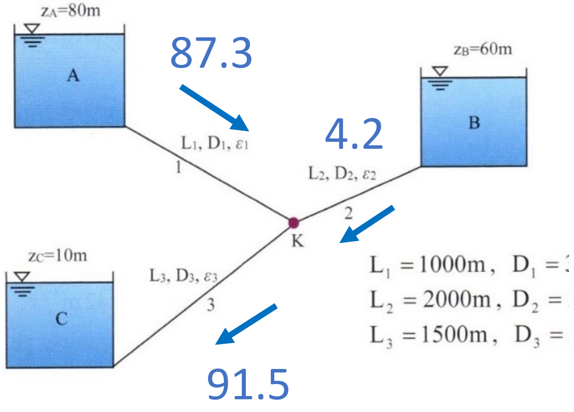
Εύρεση των παροχών Q1, Q2 και Q3=Q1+Q2 για f= 0.02

ΗΚ= **70.25502**

i	f	R	Δh	Q	Q1-Q2-Q3
1	0.02	680.203	9.744984	**0.1197**	-3.84699E-11
2	0.02	10330.6	10.25502	**0.0315**	
3	0.02	7747.93	60.25502	**0.0882**	

Q1+Q2-Q3
0.063014

Εάν η στάθμη της Β ήταν τοποθετημένη σε υψόμετρο 75m, θα ήταν Q1+Q2=Q3 (περίπτωση 3):



Δοκιμή ΗΚ=ΗΒ: Εύρεση των παροχών Q1 και Q3 μέσω solver, ελαχιστοποιώντας το DIFF, ξεχωριστά για την καθεμία

i	H	Hi-HK	Q	V	v	Re	nom	denom	f	Δh	DIFF
1	80	5	0.084387	1.1938	0.00000113	316945.839	0.24742184	11.98211	0.0206493	4.999989	1.05E-05
2	75	0			0.00000113						
3	10	65	0.090943	2.8948	0.00000113	512356.407	0.24763741	12.20412	0.0202913	65.00001	-6.2E-06
K	75				.						

Αποτέλεσμα δοκιμής: Q1 < Q3 Εάν ">" μηδενίζουμε F19 αλλιώς Q1+Q2=Q3 και μηδενίζουμε I19 (επιτρέποντας μεταβολή του K18)

Εύρεση των παροχών Q1, Q2 και Q3 για f= 0.02

ΗΚ= **74.81874**

i	f	R	Δh	Q	Q1-Q2-Q3
1	0.02	680.203	5.181258	**0.0873**	-0.008377552
2	0.02	10330.6	0.181258	**0.0042**	
3	0.02	7747.93	64.81874	**0.0915**	

Q1+Q2-Q3
-6.15E-09

Συστήματα δεξαμενών και αγωγών

- Προβλήματα συνδεδεμένων δεξαμενών
  - Εξίσωση Bernoulli, γραμμικές και τοπικές απώλειες, αντλίες, στρόβιλοι (ο τρόπος εφαρμογής τους ήδη γνωστός)
  - Επιπλέον: μετασχηματισμός της εξίσωσης Darcy-Weisbach (γραμμικών απωλειών) σε συνάρτηση την παροχή αντί την ταχύτητα:

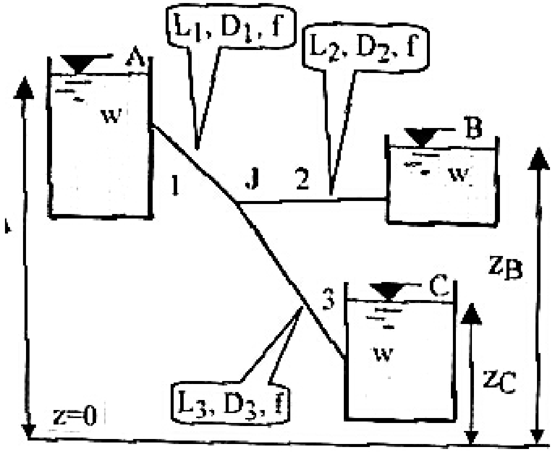
$$\Delta\mathrm{h} = \mathrm{f}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = f\,\frac{LQ^2}{12D^5} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{12D^5\Delta\mathrm{h}}{fL}}$$

  - Προβλήματα με πολλαπλές δεξαμενές και πολλαπλούς αγωγούς
- Μέθοδος Hardy – Cross για τον υπολογισμό δικτύου ύδρευσης

$1^{ος}$ τρόπος επίλυσης: μέσω των σχέσεων μεταξύ των ταχυτήτων στους αγωγούς από την εξίσωση Bernoulli

Άσκηση 8.8

Από μία δεξαμενή A με στάθμη νερού z_A = 60 m από το επίπεδο αναφοράς, ξεκινά αγωγός μήκους L_1 = 1500 m και διαμέτρου D_1 = 300 mm. O αγωγός διακλαδίζεται σε δύο άλλους με μήκη $L_2 = L_3$ = 1500 m και διαμέτρους $D_2 = D_3$ = 300 mm, οι οποίοι τροφοδοτούν δύο δεξαμενές B και C με ύψος στάθμης z_B = 30 m και z_C = 15 m αντίστοιχα, από το επίπεδο αναφοράς. Αν ο συντελεστής απωλειών είναι f = 0.04 για όλους τους αγωγούς, να υπολογιστούν οι παροχές που καταλήγουν στις δύο δεξαμενές.



Λύση. Υπόδειξη: Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ A και B και A και C, έχουμε δύο σχέσεις μεταξύ των ταχυτήτων. Από την εξίσωση της συνέχειας, μία τρίτη !

Θεωρείται γνωστό από τις προηγούμενες ασκήσεις, ότι στην ελεύθερη επιφάνεια των δεξαμενών ισχύει

$p_A = p_B = p_C = 0$ και $v_A = v_B = v_C = 0$

και επομένως $H_A = z_A$, $H_B = z_B$, $H_C = z_C$.

Έτσι η εξίσωση Bernoulli ανάμεσα στις δεξαμενές A και B δίνει

$$H_A = H_B + f\frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} + f\frac{L_2}{D_2}\frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow$$

$$60 = 30 + 0.04\frac{1500}{0.3}\frac{v_1^2}{2g} + 0.04\frac{1500}{0.3}\frac{v}{2}$$

$$10.2\, v_1^2 + 10.2\, v_2^2 = 30 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{2.94 - v_1^2}\,.$$

Li = 1500m
Di = 300mm
fi = 0.04

Ομοίως για τις δεξαμενές A και C

$$H_A = H_C + f\frac{L_1}{D_1}\frac{v_1^2}{2g} + f\frac{L_3}{D_3}\frac{v_3^2}{2g} \Rightarrow$$

$$10.2\, v_1^2 + 10.2\, v_3^2 = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_3 = \sqrt{4.42 - v_1^2}\,.$$

Η εξίσωση συνέχειας στον κόμβο J δίνει

$$\frac{\pi . D_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi . D_2^2}{4} v_2 + \frac{\pi . D_3^2}{4} v_3$$

και επειδή $D_1 = D_2 = D_3$,

έχουμε $v_1 = v_2 + v_3$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή τα v_2 και v_3 έχουμε

$$v_1 - \sqrt{2.94 - v_1^2} - \sqrt{4.42 - v_1^2} = 0\,.$$

$$v_1 - \sqrt{2.94 - v_1^2} - \sqrt{4.42 - v_1^2} = 0\ .$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί με κάποια επαναληπτική μέθοδο, όπως για παράδειγμα της διχοτόμησης. Μια και οι υπόριζες ποσότητες πρέπει να είναι θετικές, είναι προφανές ότι $v_1^2 < 2.94 \Rightarrow v_1 < 1.71$. Έτσι για

$v_1 = 1.6 \Rightarrow f(v_1) = -0.36$,

$v_1 = 1.7 \Rightarrow f(v_1) = +0.38$

και τελικά μετά από μερικές επαναλήψεις $v_1 = 1.669$ m/sec.

Επομένως $v_2 = 0.393$ m/sec, $v_3 = 1.279$ m/sec και

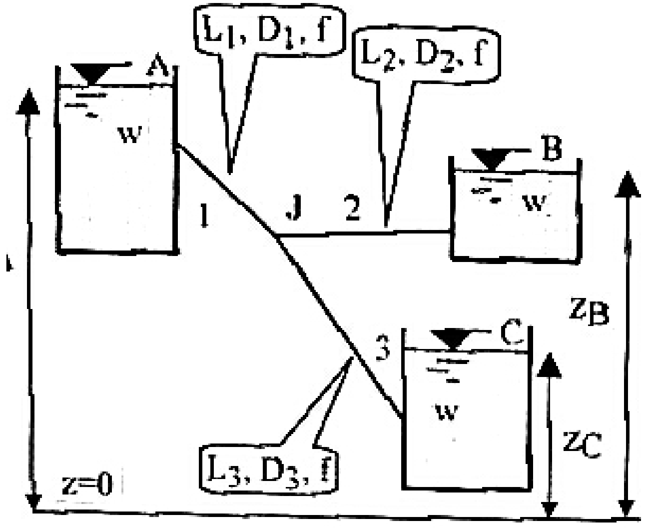
$Q_1 = 0.118$ m^3/sec $Q_2 = 0.028$ m^3/sec και $Q_3 = 0.090$ m^3/sec.

v1	f(v1)
1.7	0.239462
1.6	-0.38026
1.65	-0.11925
1.675	0.037847
1.6625	-0.04403
1.66875	-0.00408
1.671875	0.016615
1.670313	0.006205
1.669531	0.001049
1.669141	-0.00152

2^{ος} τρόπος: μέσω προσεγγιστικού υπολογισμού **του φορτίου στον κόμβο**, έτσι ώστε να ισχύει η εξίσωση της συνέχειας!

Η άσκηση μπορεί να λυθεί και με τον εξής τρόπο :

Εκλέγουμε μια αυθαίρετη τιμή για το ολικό φορτίο H_J στον κόμβο J. Εφόσον η δεξαμενή A τροφοδοτεί τις B και C, η τιμή αυτή του ολικού φορτίου θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το $H_B = 30$ m.



Li = 1500m
Di = 300mm
fi = 0.04

Έστω $H_J = 35$ m.

Οι απώλειες για κάθε έναν από τους 3 αγωγούς θα είναι

$$|H_i - H_J| = h_i = f_i \frac{L_i . Q_i^2}{12 D_i^5} \Rightarrow Q_i = \sqrt{\frac{12 D_i^5 . |H_i - H_J|}{f_i . L_i}}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Έτσι υπολογίζονται (για $H_J = 35$ m)

$Q_1 = 0.110$ m^3/sec, $\quad Q_2 = 0.049$ m^3/sec, $\quad Q_3 = 0.099$ m^3/sec.

Αν η εκλογή του H_J ήταν σωστή, θα έπρεπε να ισχύει και η εξίσωση συνέχειας, δηλαδή

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 .$$

Όπως φαίνεται όμως ισχύει $0.110 < 0.049 + 0.099$

Άρα η επόμενη εκλογή φορτίου για το J πρέπει να είναι $H_J < 35$ m, έτσι ώστε η Q_1 να αυξηθεί με αντίστοιχη ελάττωση των Q_2 και Q_3.

Έστω λοιπόν $H_J = 32$ m. Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε

$Q_1 = 0.117$ m^3/sec,

$Q_2 = 0.031$ m^3/sec,

$Q_3 = 0.091$ m^3/sec.

Η εξίσωση συνέχειας δεν ισχύει και πάλι, επομένως η επαναληπτική διαδικασία πρέπει να συνεχιστεί. Είναι προφανές ότι μετά από μερικές επαναλήψεις θα καταλήξουμε στον υπολογισμό της ακριβούς τιμής του H_J και τις ίδιες τιμές των Q_2 και Q_3 που είχαν υπολογιστεί με την προηγούμενη μεθοδολογία.

(Τελική τιμή $H_J = 31.57$ m).

Έστω $H_J = 35$ m.

Οι απώλειες για κάθε έναν από τους 3 αγωγούς θα είναι

$$|H_i - H_J| = h_i = f_i \frac{L_i . Q_i^2}{12 D_i^5} \Rightarrow Q_i = \sqrt{\frac{12 D_i^5 . |H_i - H_J|}{f_i . L_i}}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Έτσι υπολογίζονται (για $H_J = 35$ m)

$Q_1 = 0.110$ m^3/sec, $\quad Q_2 = 0.049$ m^3/sec, $\quad Q_3 = 0.099$ m^3/sec.

Αν η εκλογή του H_J ήταν σωστή, θα έπρεπε να ισχύει και η εξίσωση συνέχειας, δηλαδή

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 .$$

Στον παρακάτω πίνακα, φαίνεται η διαδικασία δοκιμής – σφάλματος (trial and error), η οποία ξεκινάει με τις τιμές αυτές της παροχής για Hj=35m. Επειδή η παραδοχή αυτή οδηγεί στις συγκεκριμένες τιμές για τις οποίες (όπως φαίνεται στην τελευταία γραμμή η διαφορά Q1-Q2-Q3 = -0.0377, στη συνέχεια δοκιμάζονται άλλες τιμές (32, 31, …), έως να πλησιάσει η διαφορά των παροχών την τιμή 0. Πράγματι, για 31.57, η διαφορά αυτή είναι αμελητέα, και επομένως οι αντίστοιχες τιμές της παροχής αποτελούν τη λύση.

				Hj=	35	32	31	31.5	31.75	31.625	31.5625	31.5938	31.57
					δοκιμες								
i	Hi	fi	Li	Di	Qi	Qi	Qi	Qi	Qi	Qi	Qi	Qi	Qi
A	60	0.04	1500	0.3	0.11023	0.11665	0.1187182	0.11769	0.11717	0.11743	0.11756	0.1175	0.11755
B	30	0.04	1500	0.3	0.0493	0.03118	0.0220454	0.027	0.02916	0.0281	0.02756	0.02783	0.02762
C	15	0.04	1500	0.3	0.09859	0.0909	0.0881816	0.08955	0.09022	0.08989	0.08972	0.0898	0.08974
		Q1-Q2-Q3=			-0.0377	-0.0054	0.0084911	0.00114	-0.00222	-0.00056	0.00029	-0.00014	0.00018

Συστήματα δεξαμενών και αγωγών

- Προβλήματα συνδεδεμένων δεξαμενών
    - Εξίσωση Bernoulli, γραμμικές και τοπικές απώλειες, αντλίες, στρόβιλοι (ο τρόπος εφαρμογής τους ήδη γνωστός)
    - Επιπλέον: μετασχηματισμός της εξίσωσης Darcy-Weisbach (γραμμικών απωλειών) σε συνάρτηση την παροχή αντί την ταχύτητα:

$$\Delta \mathrm{h} = \mathrm{f}\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = f\,\frac{LQ^2}{12D^5} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{12D^5\Delta \mathrm{h}}{fL}}$$

    - Προβλήματα με πολλαπλές δεξαμενές και πολλαπλούς αγωγούς
- Μέθοδος Hardy – Cross για τον υπολογισμό δικτύου ύδρευσης

Μέθοδος επίλυσης δικτύων διανομής νερού Hardy - Cross

Επαναληπτική διαδικασία: εκλέγονται παροχές ανά σωλήνα, βελτιώνονται σε κάθε επαναληπτικό κύκλο. Χρησιμοποιείται η σχέση γραμμικών απωλειών – παροχής, και μια απλοποιημένη τροποποίησή της:

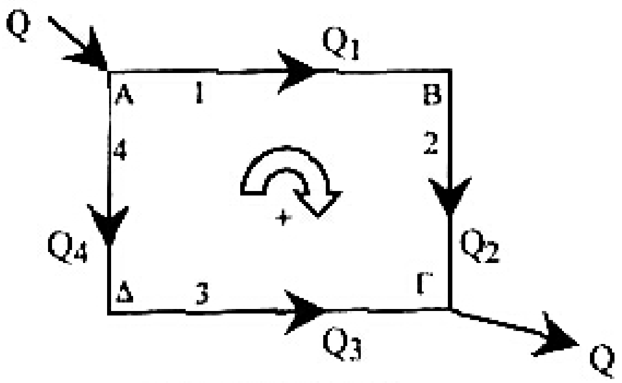
$$h = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = f\frac{LQ^2}{12.1\ \ D^5} = rQ^m$$

στην οποία το m δεν είναι ακριβώς 2, λόγω της εξάρτησης και του r από το Re, άρα από το V, και άρα και από την παροχή Q.

Οι αρχικά εκλεγμένες τιμές της Q σε κάθε κόμβο ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας: $\Sigma Q_{εισερχόμενη} = \Sigma Q_{εξερχόμενη}$

Επειδή όμως είναι τυχαίες, δεν ικανοποιούν την συνθήκη ότι το άθροισμα των απωλειών σε κάθε βρόγχο (κλειστό κύκλωμα σωλήνων) είναι ίσο με το μηδέν. Για τον λόγο αυτό, υφίστανται διορθώσεις με επαναλήψεις, οι οποίες γίνονται μέχρι να ικανοποιηθεί και αυτή η συνθήκη. Στον βρόγχο του σχήματος εκλέγουμε αρχικές τιμές των Q1, Q2, Q3, Q4, και ορίζουμε μια θετική φορά. Η διόρθωση της επαναληπτικής διαδικασίας βασίζεται στην εξίσωση:

$$\Delta Q = -\frac{\sum r.Q^m}{m.\sum r.Q^{m-1}} = -\frac{\sum h(\text{πρωτης εκλογης με το προσημο που βρηκαμε})}{m.\sum \frac{h}{Q}(\text{χωρις να παιρνουμε υποψη το προσημο})}$$



βρόγχος ΑΒΓΔΑ
κλάδοι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ

Η διαδικασία γίνεται σε κάθε βρόγχο, λαμβάνοντας υπόψη ότι η διόρθωση της παροχής σε κάθε σωλήνα που ανήκει σε δύο βρόγχους θα είναι ίση με το άθροισμα των διορθώσεων των δύο βρόγχων

Παράδειγμα δικτύου 2 βρόγχων

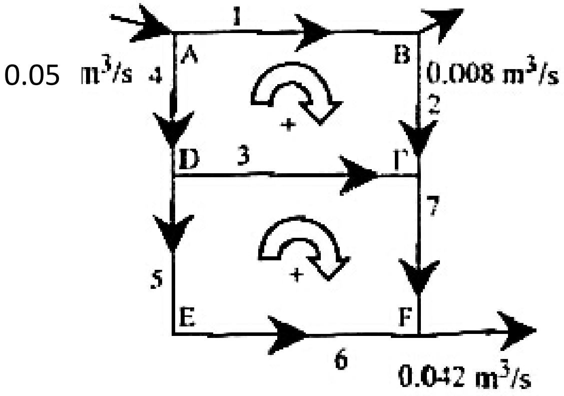
Δίνεται το δίκτυο διανομής νερού του σχήματος. Οι τιμές του r θεωρούνται ανεξάρτητες του Re. Ζητούνται οι παροχές των αγωγών του δικτύου. Συντελεστής απωλειών f = 0.02.

Αγωγός	Μήκος (m)	Διάμετρος (m)
1	700	0.20
2	160	0.15
3	700	0.25
4	160	0.25
5	160	0.15
6	700	0.15
7	160	0.25

Μέθοδος: με δοσμένες τις παροχές εισόδου και εξόδου, υποθέτουμε επιμέρους παροχές. Στη συνέχεια εκτελούμε προσεγγιστική διαδικασία διόρθωσης, η οποία εξισορροπεί τις απώλειες με βάση τις παροχές.

Λύση.

Για τον υπολογισμό του h σε m, το r υπολογίζεται από τη σχέση



$$r = f\frac{L}{12D^5},$$

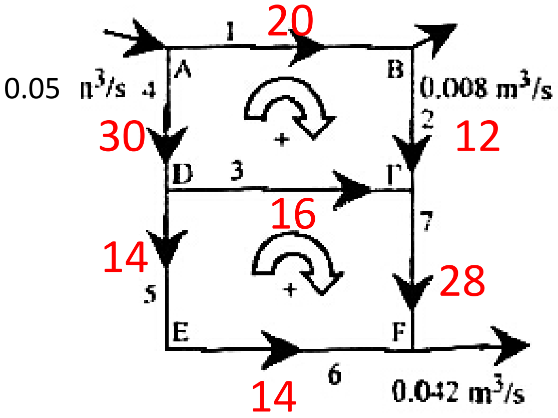
ενώ το Q θα είναι σε m³/sec.

Έτσι υπολογίζονται

Υπενθυμίζεται ότι: $h = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = f\frac{LQ^2}{12.1\ D^5} = r\,Q^2$

Και άρα: $r = f\frac{L}{12.1\ D^5}$

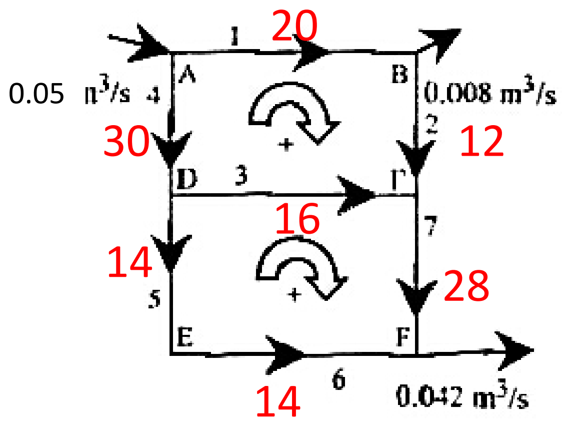
$r_1 = 3650,\ r_2 = 3510,\ r_3 = 1190,\ r_4 = 273,\ r_5 = 3510,\ r_6 = 15400,\ r_7 = 273.$



Η αρχική παραδοχή για τα Q, είναι ότι από τα 50 l/s τα 20 κατευθύνονται προς το B και τα υπόλοιπα προς το D. Ετσι, διαμορφώνονται οι δύο πρώτες παροχές (0.020 και 0.012)
Επίσης, από τα 30 l/s του AD, γίνεται η παραδοχή ότι τα 16 κατευθύνονται προς το DC και τα υπόλοιπα 14 προς το DE. Ετσι διαμορφώνονται όλες οι αρχικές παροχές.

Ασκηση 8.11 - Μέθοδος HARDY - CROSS

		1ος κύκλος υπολογισμών			2ος κύκλος υπολογισμών			3ος κύκλος υπολογισμών		
Αγωγός	r	Q	h	h/Q	Q	h	h/Q	Q	h	h/Q
AB	3650	0.020	1.460	73.0	0.01503	0.823	54.8	0.01572	0.903	57.4
BC	3510	0.012	0.505	42.1	0.00703	0.174	24.7	0.00772	0.209	27.1
CD	1190	-0.016	-0.304	19.0	-0.02644	-0.831	31.4	-0.02635	-0.825	31.3
DA	273	-0.030	-0.246	8.2	-0.03497	-0.333	9.54	-0.03428	-0.321	9.36
			Σ=1.415	Σ=142.3		Σ=-0.167	Σ=120.4		Σ=-0.034	Σ=125.2
		$\Delta Q = -\frac{1.415}{2*142.3} = -0.00497$ Στον κοινό αγωγό CD ΔQ=0.00497-0.00547=-0.01044			$\Delta Q = -\frac{-0.167}{2*120.4} = 0.00069$ Στον κοινό αγωγό CD ΔQ=0.00069-0.0006=0.00009			$\Delta Q = -\frac{-0.034}{2*125.2} = 0.000136$ Στον κοινό αγωγό CD ΔQ = 0.000013		
DC	1190	0.016	0.304	19.00	0.02644	0.831	31.4	0.02635	0.825	31.3
CF	273	0.028	0.214	7.64	0.03347	0.306	9.14	0.03407	0.317	9.3
FE	15400	-0.014	-3.020	216.00	-0.00853	-1.121	131.3	-0.00793	-0.968	122.1
ED	3510	-0.014	-0.688	49.20	-0.00853	-0.256	29.9	-0.00793	-0.221	27.8
			Σ=-3.19	Σ = 292		Σ=-0.240	Σ=201.7		Σ = -0.047	Σ = 190.5
		$\Delta Q = -\frac{-3.19}{2*292} = 0.00547$ Στον κοινό αγωγό CD ΔQ=0.00547-(-0.00497)=0.01044			$\Delta Q = -\frac{-0.240}{2*201.7} = 0.0006$ Στον κοινό αγωγό CD ΔQ =0.0006-(0.00069)= -0.00009			$\Delta Q = -\frac{-0.047}{2*190.5} = 0.0000123$ Στον κοινό αγωγό CD ΔQ = -0.000013		



Ασκηση 8.11 - Μέθοδος HARDY - CROSS

Αγωγός	r	1ος κύκλος υπολογισμών Q	h	h/Q	2ος κύκλος υπολογισμών Q	h	h/Q	3ος κύκλος υπολογισμών Q	h	h/Q
AB	3650	0.020	1.460	73.0	0.01503	0.823	54.8	0.01572	0.903	57.4
BC	3510	0.012	0.505	42.1	0.00703	0.174	24.7	0.00772	0.209	27.1
CD	1190	-0.016	-0.304	19.0	-0.02644	-0.831	31.4	-0.02635	-0.825	31.3
DA	273	-0.030	-0.246	8.2	-0.03497	-0.333	9.54	-0.03428	-0.321	9.36
			Σ=1.415	Σ=142.3		Σ=-0.167	Σ=120.4		Σ=-0.034	Σ=125.2

1ος κύκλος: $\Delta Q = -\frac{1.415}{2 * 142.3} = -0.00497$

Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ=0.00497-0.00547=-0.01044

2ος κύκλος: $\Delta Q = -\frac{-0.167}{2 * 120.4} = 0.00069$

Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ=0.00069-0.0006=0.00009

3ος κύκλος: $\Delta Q = -\frac{-0.034}{2 * 125.2} = 0.000136$

Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ = 0.000013

Αγωγός	r	1ος κύκλος Q	h	h/Q	2ος κύκλος Q	h	h/Q	3ος κύκλος Q	h	h/Q
DC	1190	0.016	0.304	19.00	0.02644	0.831	31.4	0.02635	0.825	31.3
CF	273	0.028	0.214	7.64	0.03347	0.306	9.14	0.03407	0.317	9.3
FE	15400	-0.014	-3.020	216.00	-0.00853	-1.121	131.3	-0.00793	-0.968	122.1
ED	3510	-0.014	-0.688	49.20	-0.00853	-0.256	29.9	-0.00793	-0.221	27.8
			Σ=-3.19	Σ = 292		Σ=-0.240	Σ=201.7		Σ = -0.047	Σ = 190.5

1ος κύκλος: $\Delta Q = -\frac{-3.19}{2 * 292} = 0.00547$

Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ=0.00547-(-0.00497)=0.01044

2ος κύκλος: $\Delta Q = -\frac{-0.240}{2 * 201.7} = 0.0006$

Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ =0.0006-(0.00069)= -0.00009

3ος κύκλος: $\Delta Q = -\frac{-0.047}{2 * 190.5} = 0.0000123$

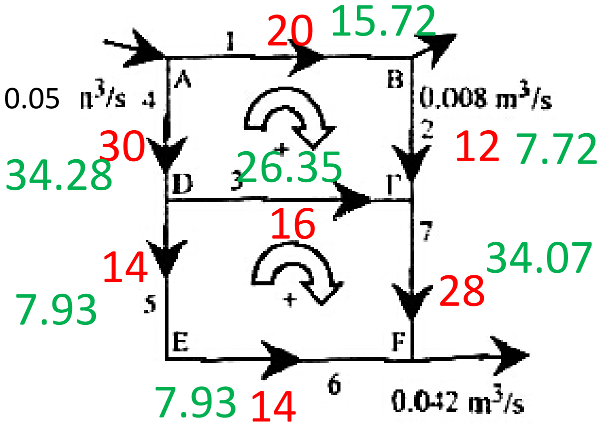
Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ = -0.000013

Ο 1ος κύκλος υπολογισμών συνεχίζεται με τον υπολογισμό των h, h/Q, και του ΔQ σε κάθε βρόγχο.
Στον κοινό και στους δύο βρόγχους αγωγό CD επιβάλλονται και οι δύο διορθώσεις.

$$h = r\, Q^2$$

$$\Delta Q = -\frac{\sum r.Q^m}{m.\sum r.Q^{m-1}} = -\frac{\sum h(\text{πρωτης εκλογης με το προσημο που βρηκαμε})}{m.\sum \frac{h}{Q}(\text{χωρις να παιρνουμε υποψη το προσημο})}$$



Κατόπιν ξεκινάει ο δεύτερος κύκλος υπολογισμών, με τις διορθωμένες παροχές …

Έως ότου οι διορθώσεις ΔQ γίνουν αμελητέες

$$h = \mathrm{r}\, Q^2$$

Ασκηση 8.11 - Μέθοδος HARDY - CROSS

Αγωγός	r	1ος κύκλος υπολογισμών Q	h	h/Q	2ος κύκλος υπολογισμών Q	h	h/Q	3ος κύκλος υπολογισμών Q	h	h/Q
AB	3650	0.020	1.460	73.0	0.01503	0.823	54.8	0.01572	0.903	57.4
BC	3510	0.012	0.505	42.1	0.00703	0.174	24.7	0.00772	0.209	27.1
CD	1190	-0.016	-0.304	19.0	-0.02644	-0.831	31.4	-0.02635	-0.825	31.3
DA	273	-0.030	-0.246	8.2	-0.03497	-0.333	9.54	-0.03428	-0.321	9.36
			Σ=1.415	Σ=142.3		Σ=-0.167	Σ=120.4		Σ=-0.034	Σ=125.2

1ος κύκλος: $\Delta Q = -\dfrac{1.415}{2*142.3} = -0.00497$

Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ=-0.00497-0.00547=-0.01044

2ος κύκλος: $\Delta Q = -\dfrac{-0.167}{2*120.4} = 0.00069$

Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ=0.00069-0.0006=0.00009

3ος κύκλος: $\Delta Q = -\dfrac{-0.034}{2*125.2} = 0.000136$

Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ = 0.000013

Αγωγός	r	1ος κύκλος Q	h	h/Q	2ος κύκλος Q	h	h/Q	3ος κύκλος Q	h	h/Q
DC	1190	0.016	0.304	19.00	0.02644	0.831	31.4	0.02635	0.825	31.3
CF	273	0.028	0.214	7.64	0.03347	0.306	9.14	0.03407	0.317	9.3
FE	15400	-0.014	-3.020	216.00	-0.00853	-1.121	131.3	-0.00793	-0.968	122.1
ED	3510	-0.014	-0.688	49.20	-0.00853	-0.256	29.9	-0.00793	-0.221	27.8
			Σ=-3.19	Σ = 292		Σ=-0.240	Σ=201.7		Σ = -0.047	Σ = 190.5

1ος κύκλος: $\Delta Q = -\dfrac{-3.19}{2*292} = 0.00547$

Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ=0.00547-(-0.00497)=0.01044

2ος κύκλος: $\Delta Q = -\dfrac{-0.240}{2*201.7} = 0.0006$

Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ =0.0006-(0.00069)= -0.00009

3ος κύκλος: $\Delta Q = -\dfrac{-0.047}{2*190.5} = 0.0000123$

Στον κοινό αγωγό CD

ΔQ = -0.000013

$$\Delta Q = -\frac{\sum r.Q^m}{m.\sum r.Q^{m-1}} = -\frac{\sum h(\text{πρωτης εκλογης με το προσημο που βρηκαμε})}{m.\sum \frac{h}{Q}(\text{χωρις να παιρνουμε υποψη το προσημο})}$$

Μετά τον 3ο κύκλο υπολογισμών, το ΔQ έχει γίνει πολύ μικρό. Ετσι, οι παροχές που προέκυψαν απ’αυτόν είναι οι τελικές.