Υδροδυναμική

Σταθερή ασυμπίεστη ροή σε αγωγούς υπό πίεση:

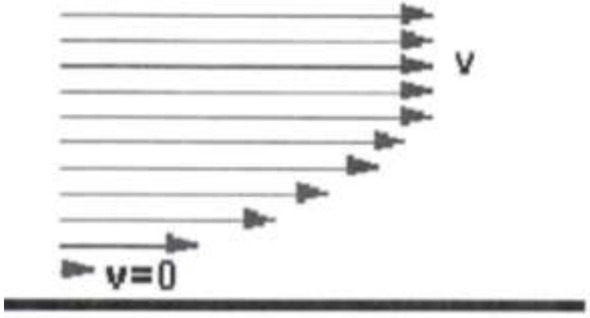
- Στρωτή και τυρβώδης ροή
- Γραμμικές απώλειες

Τεράστια σημασία του **ιξώδους**:

Ύπαρξη διατμητικών τάσεων που δημιουργούν **απώλειες ενέργειας**

Είδη ροών

- **Στρωτή ή γραμμική ή αστρόβιλη ροή**, όταν τα στοιχεία του ρευστού κινούνται σε παράλληλες μεταξύ τους γραμμές και δεν διασχίζουν τις γραμμές των άλλων στοιχείων. Το υγρό φαίνεται να κινείται με ολίσθηση φύλλων απειροστής πυκνότητας σχετικά με γειτονικά στρώματα. Παράδειγμα αποτελεί ο καπνός όταν ανέρχεται ήρεμα και κατακόρυφα.



- **Τυρβώδης ή στροβιλώδης** ροή, όταν τα στοιχεία του ρευστού έχουν ακανόνιστη κίνηση. Γενικά μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μια μέση, και μια ταλαντώσεων διαφόρων συχνοτήτων. Στο παράδειγμα του καπνού, η κίνηση είναι τυρβώδης όταν μετά την ήρεμη πορεία του, αρχίζει να κινείται ακανόνιστα.

Εμφάνιση στρωτής και τυρβώδους ροής

- **Στρωτή ή γραμμική ή αστρόβιλη ροή**, μικρές ταχύτητες, η μικρές διαστάσεις ροής (πχ διάμετρος), ή μεγάλο ιξώδες: οι δυνάμεις του ιξώδους υπερισχύουν των δυνάμεων αδρανείας. Ετσι διατηρείται η σχετική θέση των μορίων του ρευστού μεταξύ τους, και εμποδίζεται η ανάμιξή τους. Η λιγότερο συνηθισμένη κατάσταση σε πρακτικά προβλήματα.

- **Τυρβώδης ή στροβιλώδης** ροή, η πιο συνηθισμένη, λόγω του μικρού ιξώδους του νερού. Ακανόνιστες, χαοτικές κινήσεις των μορίων. Αδύνατη η αναλυτική περιγραφή της κίνησης, οπότε χρησιμοποιούνται πειραματικές – εμπειρικές μέθοδοι.

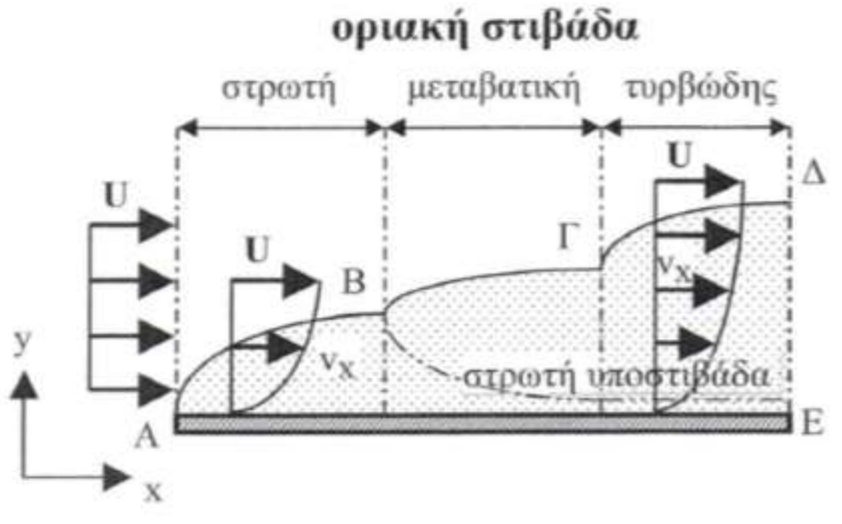
Μόνιμη και μη-μόνιμη ροή

- Στρωτή: ο διαχωρισμός είναι ευδιάκριτος
- Τυρβώδης: η ροή δεν μπορεί να είναι απόλυτη μόνιμη, παρά μόνο «μέση μόνιμη ροή», με την έννοια ότι οι γραμμές ροής έχουν χαοτικό χαρακτήρα, αλλά η παροχή μπορεί να παραμένει σταθερή.

Θεωρία της οριακής στιβάδας

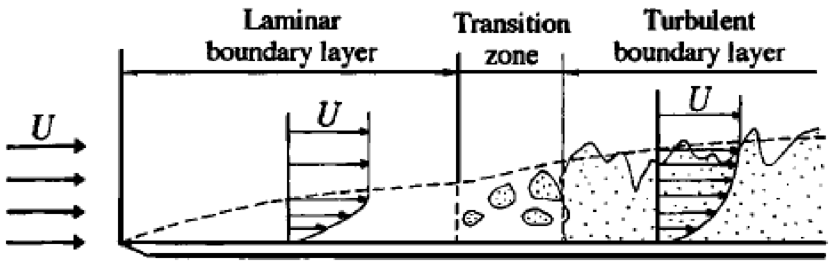
Εξισώσεις Navier-Stokes με μ=0, μετασχηματίζονται στις Euler.
Στις περισσότερες περιπτώσεις, ακόμα και για το νερό, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε τέλειο ρευστό.
Αιτία: η επαφή του ρευστού με τα τοιχώματα ή με άλλα στερεά που παρεμβάλλονται στη ροή.
Η περιοχή της ροής στην είσοδο σε αγωγό, ή σε πλάκα χωρίζεται σε δύο υποπεριοχές:

- Επίδραση της τριβής ασήμαντη
- Τριβές κυριαρχούν: οριακή στιβάδα

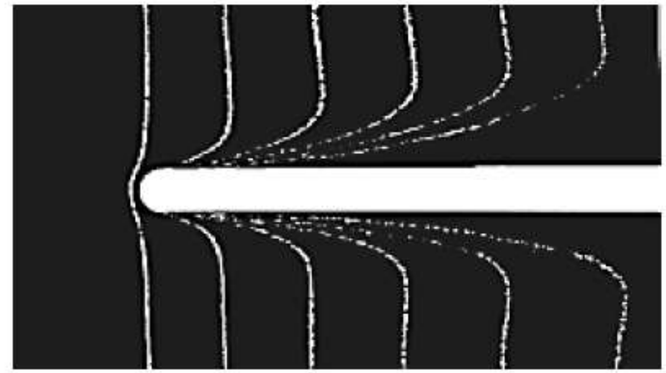


Τρείς υποπεριοχές της οριακής στιβάδας: στρωτή, μεταβατική, τυρβώδης

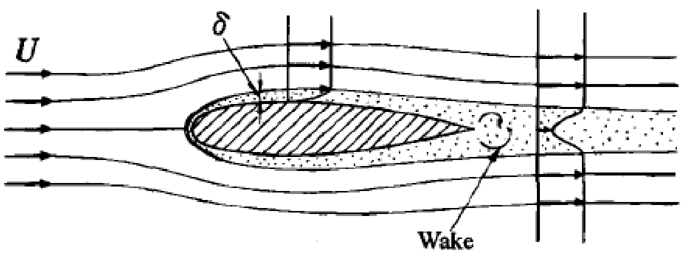
Prandtl - Οριακή στιβάδα



Boundary layer on a flat board surface



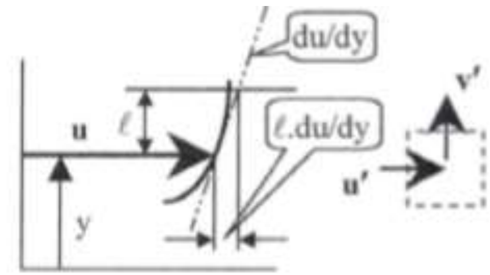
Development of boundary layer on a flat plate (thickness 5 mm) in water, velocity 0.6 m/s



Boundary layer around body

Man lying down is less affected by the coastal breeze than woman standing up

Μήκος ανάμιξης



O Prandtl εισήγαγε την υπόθεση του **μήκους αναμίξεως (mixing length)**. Θεώρησε δηλαδή ένα μέσο μήκος ℓ, κάθετο προς τη διεύθυνση της ροής, στο οποίο ένα υλικό σημείο κινούμενο προς "αργές" στρώσεις χάνει την επιπλέον ορμή του και αποκτά τη μέση ταχύτητα των γειτονικών του σημείων. Στην πράξη βέβαια, υπάρχει μια σταδιακή μεταβολή της ταχύτητας.

Η φυσική ύπαρξη του μήκους αναμίξεως φαίνεται από τα σχήματα του καπνού, που βγαίνει από μία καπνοδόχο. Η κίνηση του αέρα γύρω από την καπνοδόχο είναι κίνηση σε οριακή στιβάδα, με όριο (τοίχωμα) τη γη. Καθώς απομακρυνόμαστε από την καπνοδόχο οι στροβιλισμοί αυξάνουν σε μέγεθος.

Η θεωρία του μήκους αναμίξεως χρησιμοποιήθηκε από τον Prandtl για τον υπολογισμό της κατανομής της ταχύτητας στην τυρβώδη ροή κατά την κίνηση ενός ρευστού πάνω από επίπεδο τοίχωμα.

Δυναμική ομοιότητα – ο αριθμός Reynolds

Θεωρούμε τη ροή ενός ρευστού η οποία χαρακτηρίζεται από ένα ορισμένο μήκος L (για παράδειγμα τη διάμετρο του σωλήνα μέσα στον οποίο κινείται το ρευστό), μία ταχύτητα V (για παράδειγμα τη μέση ταχύτητα του ρευστού στο σωλήνα) και μία πυκνότητα ρ_0 (για παράδειγμα την πυκνότητα του ίδιου του ρευστού). Ορίζουμε με τη βοήθεια των παρακάτω σχέσεων,

$$x_1' = \frac{x_1}{L}, x_2' = \frac{x_2}{L}, x_3' = \frac{x_3}{L}, t' = \frac{t.V}{L}, \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \tag{7.5}$$

$$v_1' = \frac{v_1}{V}, v_2' = \frac{v_2}{V}, v_3' = \frac{v_3}{V}, p' = \frac{p}{\rho_0.V^2}, f_1' = \frac{L.f_1}{V^2}, f_2' = \frac{L.f_2}{V^2}, f_3' = \frac{L.f_3}{V^2},$$

τις νέες ποσότητες x_i' για τις συντεταγμένες, t' για το χρόνο, ρ' για την πυκνότητα, v_1' για την ταχύτητα, p' για την πίεση και f_i' για τις δυνάμεις του πεδίου βαρύτητας. Είναι φανερό ότι οι νέες αυτές ποσότητες είναι αδιάστατες. Αν τώρα γράψουμε τις εξισώσεις Navier-Stokes με τη βοήθεια των νέων αυτών ποσοτήτων (απευθείας αντικατάσταση των σχέσεων (7.5)), στις σχέσεις (3.52) και (3.52α) θα έχουμε τις αδιάστατες σχέσεις :

$$\frac{\partial v_1'}{\partial t}+v_1'.\frac{\partial v_1'}{\partial x_1'}+v_2'.\frac{\partial v_1'}{\partial x_2'}+v_3'.\frac{\partial v_1'}{\partial x_3'}=f_1'-\frac{\partial p'}{\rho'.\partial x_1'}+\frac{1}{Re}.(\frac{\partial^2 v_1'}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2 v_1'}{\partial x_2'^2}+\frac{\partial^2 v_1'}{\partial x_3'^2})$$

$$\frac{\partial v_2'}{\partial t}+v_1'.\frac{\partial v_2'}{\partial x_1'}+v_2'.\frac{\partial v_2'}{\partial x_2'}+v_3'.\frac{\partial v_2'}{\partial x_3'}=f_2'-\frac{\partial p'}{\rho'.\partial x_2'}+\frac{1}{Re}.(\frac{\partial^2 v_2'}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2 v_2'}{\partial x_2'^2}+\frac{\partial^2 v_2'}{\partial x_3'^2})$$

$$\frac{\partial v_3'}{\partial t}+v_1'.\frac{\partial v_3'}{\partial x_1'}+v_2'.\frac{\partial v_3'}{\partial x_2'}+v_3'.\frac{\partial v_3'}{\partial x_3'}=f_3'-\frac{\partial p'}{\rho'.\partial x_3'}+\frac{1}{Re}.(\frac{\partial^2 v_3'}{\partial x_1'^2}+\frac{\partial^2 v_3'}{\partial x_2'^2}+\frac{\partial^2 v_3'}{\partial x_3'^2}), \tag{7.6}$$

$$\text{όπου} \quad \mathbf{Re}=\frac{V.L}{\nu}, \tag{7.7}$$

Ο αριθμός Re, που ορίζεται με τη σχέση (7.7), ονομάζεται **αριθμός του Reynolds** και είναι αδιάστατος. Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στη φυσική σημασία των όρων που εμφανίζονται στις εξισώσεις (7.6). Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το αριστερό μέλος όλων των σχέσεων παριστάνει αδρανειακές δυνάμεις (δεν είναι τίποτε άλλο παρά γινόμενο μάζας επί επιτάχυνση), ενώ οι όροι που εμφανίζονται μέσα στις παρενθέσεις των δεξιών μελών, παριστάνουν τις δυνάμεις που προέρχονται από το ιξώδες (δυνάμεις τριβής). Ας σημειωθεί ότι δεν υπάρχει γενική μέθοδος για την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes και ότι για κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα χρειάζεται να γίνουν απλουστεύσεις, στις οποίες σημαντικό ρόλο παίζει ο αριθμός Reynolds.

Πράγματι, από τις εξισώσεις (7.6) είναι φανερό ότι, αν ο αριθμός Reynolds είναι μεγάλος, τότε οι όροι των παρενθέσεων στα δεξιά μέλη μπορούν να παραλειφθούν και οι εξισώσεις (7.6) να πάρουν τη μορφή των σχέσεων (3.56), που αντιστοιχούν σ' ένα τέλειο ρευστό. Αν πάλι, ο αριθμός Reynolds είναι μικρός, τότε μπορεί κανείς να θεωρήσει μεγάλη την επίδραση των δυνάμεων τριβής και να παραλείψει τους αδρανειακούς όρους (δηλαδή τα αριστερά μέλη των σχέσεων (7.6)).

Με άλλα λόγια το πόσο μεγάλος ή μικρός είναι ο αριθμός Reynolds δείχνει τη σημασία που έχουν, αντίστοιχα, οι δυνάμεις αδράνειας και οι δυνάμεις τριβής πράγμα το οποίο οδηγεί στην απλούστευση του προβλήματος που εξετάζουμε.

Όπως είδαμε από τη σχέση (7.7), ο αριθμός Re ορίστηκε με τη βοήθεια ορισμένων χαρακτηριστικών για τη ροή μεγεθών, τα οποία χρησιμοποιήσαμε για να γράψουμε σε αδιάστατη μορφή τις εξισώσεις Navier-Stokes. Το πώς εκλέξαμε τις τιμές αυτών των χαρακτηριστικών μεγεθών στηρίζεται στην απλή λογική. Για παράδειγμα, όταν εξετάζουμε τη ροή ενός ρευστού μέσα σε ένα σωλήνα, είναι φανερό πως η διάμετρός του, μια και αυτή ορίζει το χώρο που κινείται το ρευστό, ανεξάρτητα από το μήκος του σωλήνα, θα αποτελέσει το χαρακτηριστικό μέγεθος για το μήκος. Επίσης η μέση ταχύτητα, μια και αυτή δείχνει το πόσο ρευστό περνά από τη διατομή του σωλήνα, είναι λογικό να αποτελέσει το χαρακτηριστικό μέγεθος για την ταχύτητα.

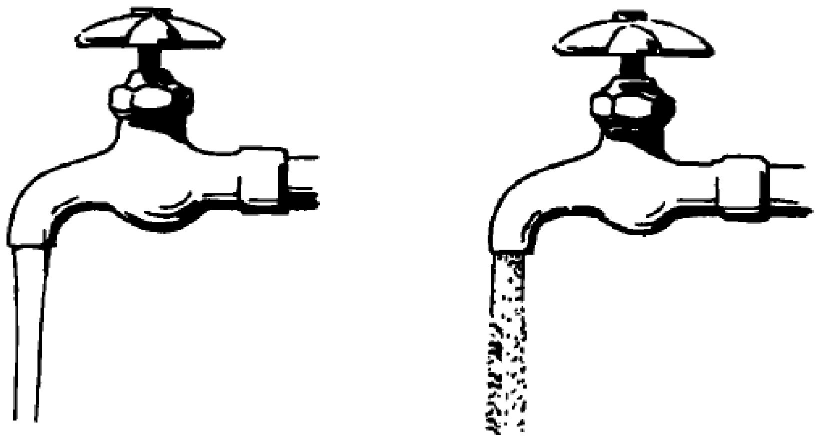
Ας θεωρήσουμε τώρα δύο προβλήματα ροής ρευστού μέσα σε χώρους που έχουν ανάλογα γεωμετρικά όρια. Για παράδειγμα, ροή μέσα σε δύο σωλήνες με διαφορετικές διαμέτρους και διαφορετικές μέσες ταχύτητες. Είναι φανερό ότι, αν ο αριθμός Reynolds είναι ίδιος και για τα δύο προβλήματα, αρκεί να επιλύσουμε μόνο μια φορά τις αδιάστατες εξισώσεις (7.6) μια και η λύση θα είναι η ίδια και για τα δύο προβλήματα. Οι πραγματικές τιμές, βέβαια, των ζητουμένων μεγεθών (σχέσεις (7.5)) θα είναι διαφορετικές αλλά οι αδιάστατες μορφές τους θα είναι οι ίδιες. Η ομοιότητα των δύο προβλημάτων ονομάζεται, **δυναμική ομοιότητα**. Η παρατήρηση αυτή μας βοηθά στην εργαστηριακή μελέτη προβλημάτων ροής, που στο εργαστήριο δε μπορούν να αναπαραχθούν στη φυσική τους κλίμακα.

Τέλος, όπως θα δούμε με λεπτομέρεια στο επόμενο κεφάλαιο, όταν ο αριθμός Reynolds έχει πάρα πολύ μεγάλες τιμές, η βασική παραδοχή που κάνουμε στη μελέτη των ρευστών ως συνεχών μέσων (ότι τα διάφορα μεγέθη είναι συνεχείς συναρτήσεις των συντεταγμένων και του χρόνου), παραβιάζεται. Δηλαδή η τιμή του αριθμού Reynolds αποτελεί ένα κριτήριο για τη διάκριση της στρωτής από την τυρβώδη ροή.

Τυρβώδης ροή – αριθμός Reynolds

- Μίξη στρωμάτων – προέρχεται από αστάθεια
- Ισορροπία δυνάμεων αδράνειας, πίεσης, τριβή
- Αύξηση τραχύτητας προκαλεί αύξηση των δυνάμεων αδράνειας, τελικά τυρβώδης
- Λόγος δυνάμεων αδράνειας προς τριβής
- Αδράνεια ανάλογη μάζας και κινηματικής κατάστασης. Τριβή, ανάλογη ιξώδους

Τυρβώδης ροή – αριθμός Reynolds



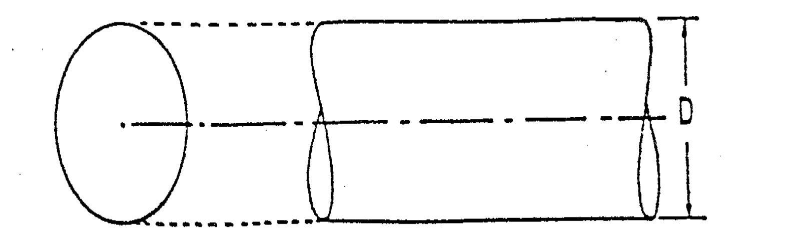
(a) Laminar flow (b) Turbulent flow

αδράνεια

$$Re = \frac{\rho U^2}{\mu \frac{U}{D}} = \frac{\rho D U}{\mu} = \frac{D U}{\nu}$$

τριβή

D: χαρακτηριστικό μήκος, σε κυκλικό αγωγό η διάμετρος
μ: το δυναμικό ιξώδες
ν: το κινηματικό ιξώδες

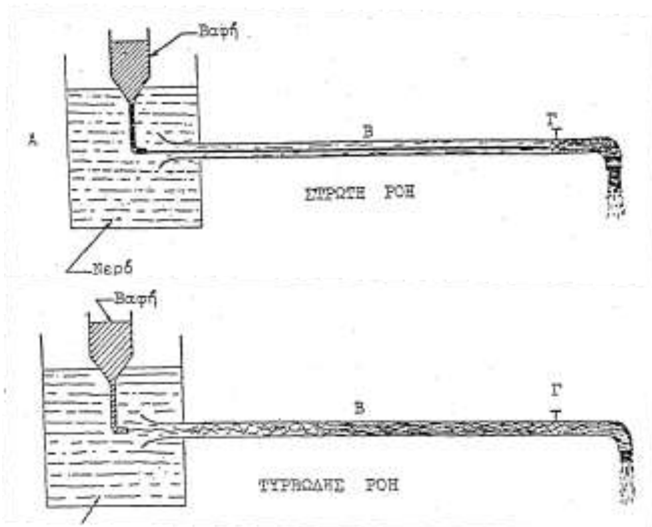


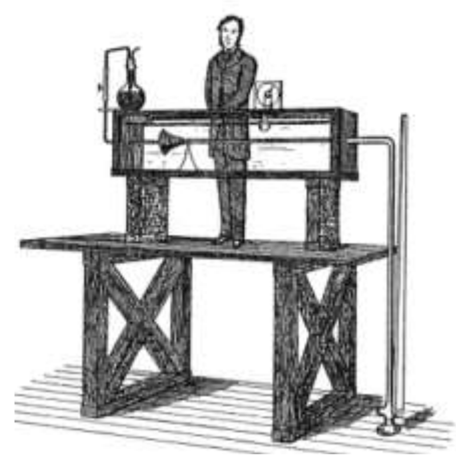
Μεγέθη αναφοράς για διάφορα είδη ροής

ΕΙΔΟΣ	Re	ΜΕΓΕΘΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ	Re_c
Ροή ρευστού σε αγωγό κυκλικής διατομής	$\frac{\upsilon d}{\nu}$	υ = *Μέση ταχύτητα ροής* d = *Εσωτερική διάμετρος του αγωγού*	2000
Ροή ρευστού πάνω σε οριζόντια πλάκα	$\frac{\upsilon_\infty x}{\nu}$	υ_∞ = *Ταχύτητα αδιατάρακτης ροής* x = *Απόσταση από την αρχή της πλάκας*	5×10^5
Ροή ρευστού πάνω σε κεκλιμένη πλάκα	$\frac{\upsilon b}{\nu}$	υ = *Μέση ταχύτητα ροής* b = *Πάχος στρώματος του ρευστού*	500
Ροή ρευστού γύρω από σφαίρα	$\frac{\upsilon_\infty d}{\nu}$	υ_∞ = *Ταχύτητα αδιατάρακτης ροής* d = *Διάμετρος της σφαίρας*	1
Εκροή ρευστού από κυκλικό ακροφύσιο	$\frac{\upsilon d}{\nu}$	υ = *Μέση ταχύτητα εκροής* d = *Διάμετρος εξόδου του ακροφυσίου*	30

Κρίσιμη τιμή Re

Πείραμα Reynolds: Διοχέτευση βαφής στο στόμιο Β

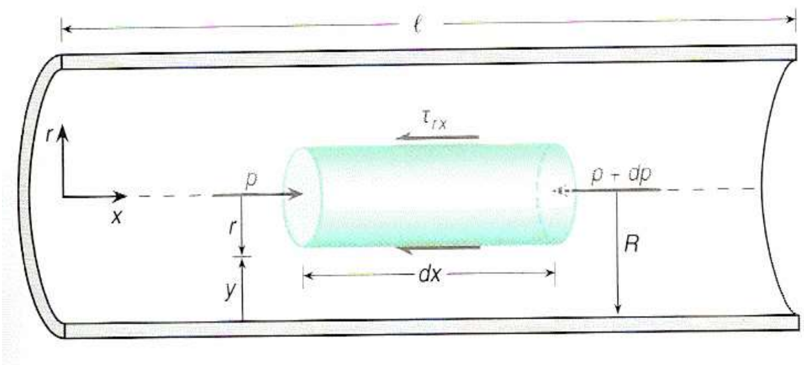




$$Re_{cr} = \frac{UD}{\nu} = 2000$$

Το Re_{cr} εξαρτάται από το αν η ροή είναι αύξουσα ή φθίνουσα, αν αυξάνεται ή μειώνεται απότομα, από εξωτερικές ταλαντώσεις και από την τραχύτητα

Διατμητική τάση σε οριζόντιο κυκλικό αγωγό



Εξισώνοντας τις δυνάμεις διάτμησης και Διαφοράς πίεσης που δρούν στο στοιχείο

$$\boxed{p\pi r^2 - (p+dp)\pi r^2} = \boxed{\tau 2\pi r}\,dx$$

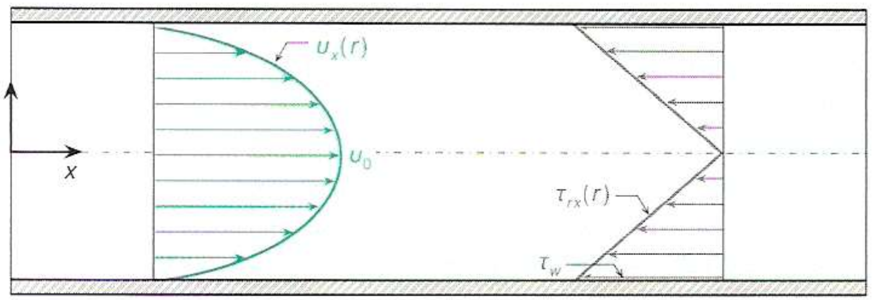
$$\tau = -\frac{dp}{dx}\cdot\frac{r}{2} \Rightarrow \tau_0 = \frac{R}{2l}(p_1 - p_2)$$

Βρίσκουμε την μέγιστη διατμητική τάση τ_0, που εμφανίζεται στα τοιχώματα

Η πτώση της πίεσης λόγω της διάτμησης είναι:
Όπου f ένας συντελεστής τριβής,
l το μήκος του αγωγού,
D η διάμετρός του
U η μέση ταχύτητα του υγρού

$$\Delta p = \frac{f}{2}\cdot\frac{l}{D}\cdot\rho U^2$$

Συντελεστής τριβής κυκλικού αγωγού για στρωτή ροή



Παραβολική κατανομή της ταχύτητας:

$$u(r) = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Μέγιστη και μέση ταχύτητα

$$U_{max} = \frac{R^2 \Delta p}{4\mu l} = 2U_{mean}$$

Σε στρωτή ροή αποδεικνύεται ότι f=64/Re, και αντικαθιστώντας στη σχέση της προηγούμενης διαφάνειας:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$$

παίρνουμε:

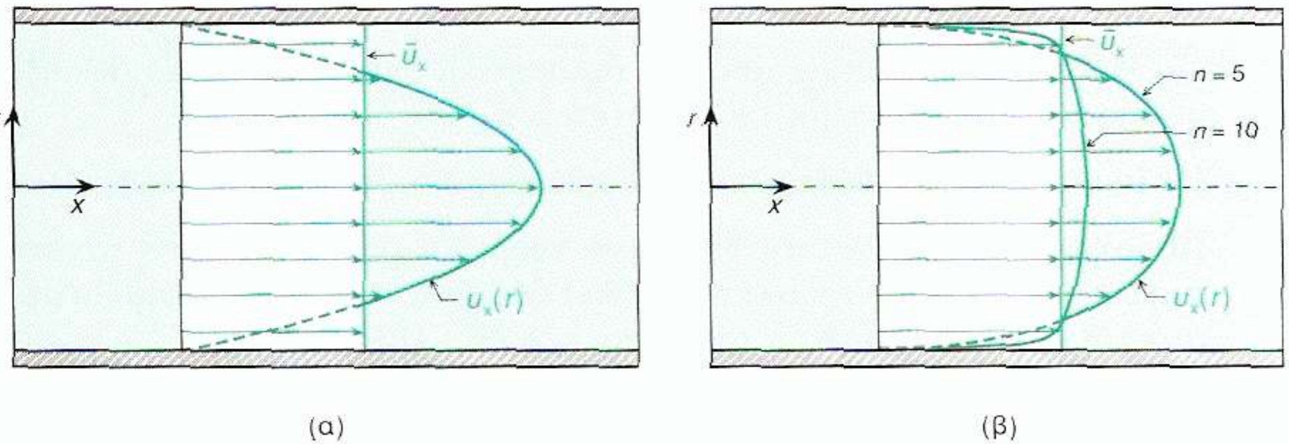
$$\Delta p = \frac{fl}{2D}\rho U^2 = \frac{64}{\frac{\rho U D}{\mu}}\frac{l}{2D}\rho U^2 = \frac{32\mu l U}{D^2}$$

Επίσης, η διαφορά πίεσης λόγω της τριβής διαιρώντας δια γ=ρg γίνεται:

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{fl}{2D}\frac{\rho U^2}{\gamma} = h_f = \frac{32\mu l U}{\gamma D^2}$$

(πτώση πίεσης σε διαστάσεις m)

Μόνιμη τυρβώδης ροή σε κυκλικό αγωγό

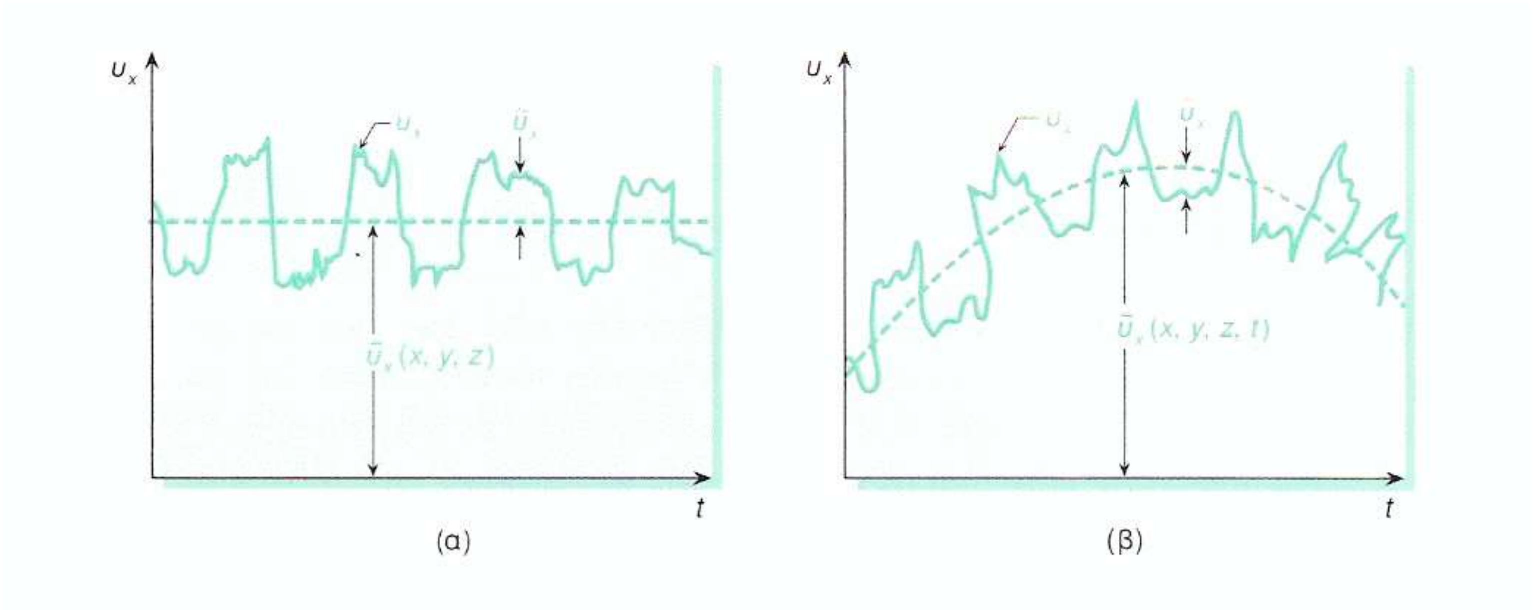


Σχήμα 4-14 *Τυπικές κατανομές της ταχύτητας για: (α) στρωτή και (β) τυρβώδη ροή νευτωνικού ρευστού σε αγωγό κυκλικής διατομής.*

Με τις συνεχείς μετακινήσεις των στροβίλων η κατανομή της ταχύτητας είναι πιο ομοιόμορφη στη στροβιλώδη ροή

Η τύρβη δημιουργείται από τις διατμητικές δυνάμεις που αναπτύσσονται λόγω του ιξώδους και από τις διαφορετικές ταχύτητες των γειτονικών στρωμάτων

Μόνιμη τυρβώδης ροή σε κυκλικό αγωγό



Η ταχύτητα μπορεί να παρουσιάζει διακυμάνσεις,
Εκτός από αυτές των στροβίλων, και στον χρόνο

Επειδή δεν υπάρχει αναλυτική σχέση για την κατανομή των ταχυτήτων,
Αναπτύχθηκαν πολλές εμπειρικές σχέσεις

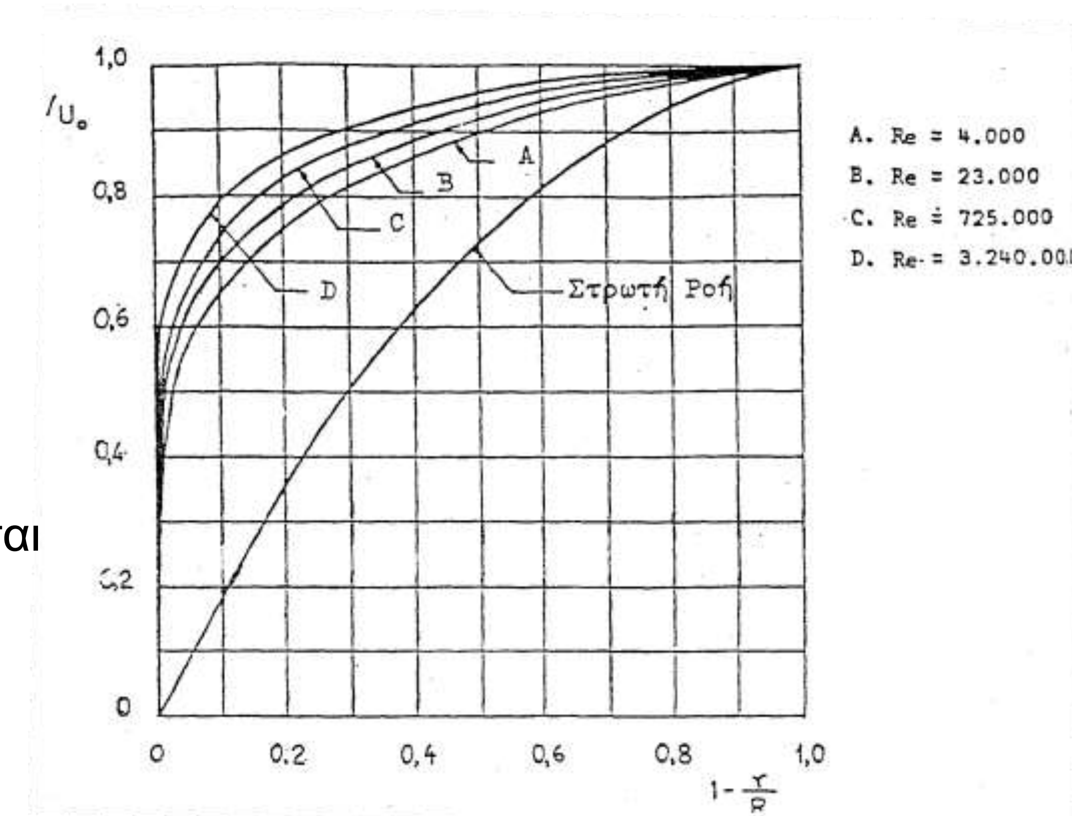
Επίδραση του Re στην κατανομή

Ο Blasius, για λείους αγωγούς (ανέφικτο), και για Re<100000. έδωσε τον νόμο αντίστασης για τον συντελεστή τριβής:

$$\mathbf{f} = \frac{0.316}{\mathbf{Re}^{0.25}}$$

Ο Nikuradse, βρήκε κατανομή Ταχυτήτων της μορφής:

$$\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{U_0}} = \left(1 - \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}}\right)^{\frac{1}{\mathbf{n}}}$$



Όπου ο συντελεστής n παίρνει τιμές μέχρι 10 για μεγάλους αριθμούς Re.
Στο σχήμα φαίνεται ότι αυξάνεται η ομοιομορφία της κατανομής με τον Re

Prandtl – νόμος τριβής

Διαδοχικές προσεγγίσεις για το f:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0\log\left(Re\sqrt{f}\right) - 0.8$$

Σχέση Colebrook – White
για τη μεταβατική περιοχή (προσεγγιστική)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.74 - 2\log\left(\frac{\varepsilon}{R} + \frac{18.7}{Re\sqrt{f}}\right)$$

Εξισώσεις υπολογισμού του f

Πίνακας 4-5 *Εξισώσεις υπολογισμού του συντελεστή τριβής αγωγών κυκλικής διατομής για στρωτή και τυρβώδη ροή*

ΕΞΙΣΩΣΗ	ΟΡΙΑ ΙΣΧΥΟΣ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
$f = \frac{64}{Re}$	$Re \leq 2000$	*Στρωτή ροή* *Για κάθε σωλήνα*
$f = \frac{0{,}3164}{Re^{1/4}}$	$4000 < Re < 10^5$	*Τυρβώδης ροή* *Λείοι σωλήνες*
$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log(Re\sqrt{f}) - 0{,}8$	$Re > 10^5$	*Τυρβώδης ροή* *Λείοι σωλήνες*
$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{d}{e}\right) + 1{,}14$	$\frac{d/e}{Re\sqrt{f}} > 0{,}005$	*Τυρβώδης ροή* *Τραχείς σωλήνες*
$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{e/d}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{f}}\right)$	$Re > 4000$	*Τυρβώδης ροή* *Τραχείς σωλήνες*

Σχέσεις για τον συντελεστή τριβής f

Table 1. Various approximations of the Colebrook's equation

Eq. num.	Equation	Range	Ref.	Authors (year)
(4)	$f=0.0055\left[1+\left(20000\varepsilon+\frac{10^6}{Re}\right)^{1/3}\right]$	$Re=4000-5\cdot 10^8$ $\varepsilon=0-0.01$	[8]	Moody (1947)
(5)	$f=0.11\left(\frac{68}{Re}+\varepsilon\right)^{0.25}$	Not specified	[9]	Altshul (1952)
(6)	$f=0.53\varepsilon+0.094\varepsilon^{0.225}+88\varepsilon^{0.44}Re^{-1.62\varepsilon^{0.134}}$	$Re=4000-5\cdot 10^7$ $\varepsilon=0.00001-0.04$	[10]	Wood (1966)
(7)	$f=\left[-2\log\left(\frac{\varepsilon}{3.7}+\frac{7}{Re^{0.9}}\right)\right]^{-2}$	Not specified	[11]	Churchill (1973)
(8)	$f=\left[1.14-2\log\left(\varepsilon+\frac{21.25}{Re^{0.9}}\right)\right]^{-2}$	$Re=5000-10^7$ $\varepsilon=0.00004-0.05$	[12]	Jain (1976)
(9)	$f=\left[-2\log\left(\frac{\varepsilon}{3.7}+\frac{5.74}{Re^{0.9}}\right)\right]^{-2}$	$Re=5000-10^8$ $\varepsilon=0.000001-0.05$	[13]	Swamee, Jain (1976)
(10)	$f=\left\{-2\log\left[\frac{\varepsilon}{3.7065}-\frac{5.0452}{Re}\log\left(\frac{\varepsilon^{1.1098}}{2.8257}+\frac{5.8506}{Re^{0.8981}}\right)\right]\right\}^{-2}$	$Re=4000-4\cdot 10^8$	[14]	Chen (1979)
(11)	$f=\left[-1.8\log\left(0.135\varepsilon+\frac{6.5}{Re}\right)\right]^{-2}$	$Re=4000-4\cdot 10^8$ $\varepsilon=0-0.05$	[15]	Round (1980)
(12)	$f=\left\{-2\log\left[\frac{\varepsilon}{3.7}-\frac{5.02}{Re}\log\left(\varepsilon-\frac{5.02}{Re}\log\left(\frac{\varepsilon}{3.7}+\frac{13}{Re}\right)\right)\right]\right\}^{-2}$	$Re=4000-10^8$ $\varepsilon=0.00004-0.05$	[16]	Zigrang, Sylvester (1982)
(13)	$f=\left\{-1.8\log\left[\left(\frac{\varepsilon}{3.7}\right)^{1.11}+\frac{6.9}{Re}\right]\right\}^{-2}$	$Re=4000-10^8$ $\varepsilon=0.000001-0.05$	[17]	Haaland (1983)
(14)	$A=0.11\left(\frac{68}{Re}+\varepsilon\right)^{0.25}$ If $A\geq 0.018$ then $f=A$ and if $A<0.018$ then $f=0.0028+0.85A$	$Re=4000-10^8$ $\varepsilon=0-0.05$	[18]	Tsal (1989)
(15)	$f=\left[-2\log\left(\frac{\varepsilon}{3.70}+\frac{95}{Re^{0.983}}-\frac{96.82}{Re}\right)\right]^{-2}$	$Re=4000-10^8$ $\varepsilon=0-0.05$	[19]	Manadilli (1997)
(16)	$f=\left\{-2\log\left[\frac{\varepsilon}{3.7065}-\frac{5.0272}{Re}\log\left(\frac{\varepsilon}{3.827}-\frac{4.567}{Re}\cdot\log\left(\left(\frac{\varepsilon}{7.79}\right)^{0.9924}+\left(\frac{5.3326}{208.82+Re}\right)^{0.9345}\right)\right)\right]\right\}^{-2}$	$Re=3000-1.5\cdot 10^8$ $\varepsilon=0-0.05$	[20]	Romeo, Royo, Monzon (2002)
(17)	$f=1.613\left[\ln\left(0.234\varepsilon^{1.1007}-\frac{60.525}{Re^{1.1105}}+\frac{56.291}{Re^{1.0712}}\right)\right]^{-2}$	$Re=3000-10^8$ $\varepsilon=0-0.05$	[21]	Fang (2011)
(18)	$\beta=\ln\frac{Re}{1.816\ln\left(\frac{1.1Re}{\ln(1+1.1Re)}\right)}$; $f=\left[-2\log\left(10^{-0.4343\beta}+\frac{\varepsilon}{3.71}\right)\right]^{-2}$	Not specified	[7]	Brkić (2011)
(19)	$\beta=\ln\frac{Re}{1.816\ln\left(\frac{1.1Re}{\ln(1+1.1Re)}\right)}$; $f=\left[-2\log\left(\frac{2.18\beta}{Re}+\frac{\varepsilon}{3.71}\right)\right]^{-2}$	Not specified	[7]	Brkić (2011)

$$f=\left[-2\log\left(\frac{\varepsilon}{3.70}+\frac{95}{Re^{0.983}}-\frac{96.82}{Re}\right)\right]^{-2}$$

$$f=\left\{-2\log\left[\frac{\varepsilon}{3.7065}-\frac{5.0272}{Re}\log\left(\frac{\varepsilon}{3.827}-\frac{4.567}{Re}\cdot\log\left(\left(\frac{\varepsilon}{7.79}\right)^{0.9924}+\left(\frac{5.3326}{208.82+Re}\right)^{0.9345}\right)\right)\right]\right\}^{-2}$$

$$f=1.613\left[\ln\left(0.234\varepsilon^{1.1007}-\frac{60.525}{Re^{1.1105}}+\frac{56.291}{Re^{1.0712}}\right)\right]^{-2}$$

$$\beta=\ln\frac{Re}{1.816\ln\left(\frac{1.1Re}{\ln(1+1.1Re)}\right)};\ f=\left[-2\log\left(10^{-0.4343\beta}+\frac{\varepsilon}{3.71}\right)\right]^{-2}$$

$$\beta=\ln\frac{Re}{1.816\ln\left(\frac{1.1Re}{\ln(1+1.1Re)}\right)};\ f=\left[-2\log\left(\frac{2.18\beta}{Re}+\frac{\varepsilon}{3.71}\right)\right]^{-2}$$

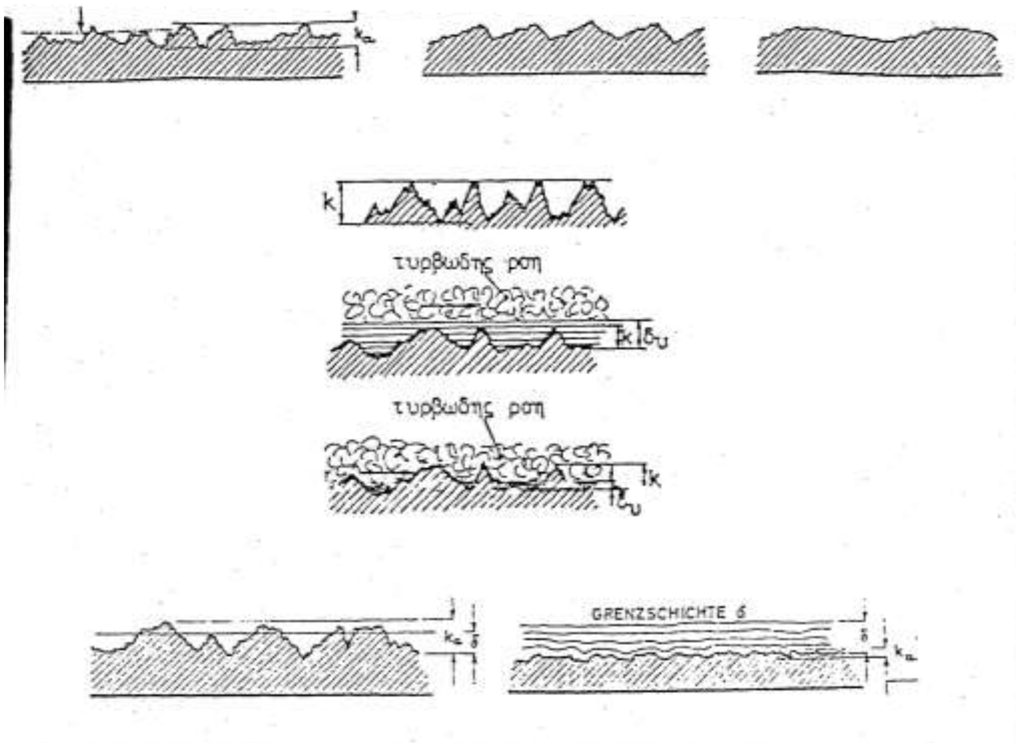
Μια απλή και ακριβής σχέση

3.20 Papaevangelou, Evangelides and Tzimopoulos approximation

Papaevangelou et al (2010) noticed that error values tended to “bend” to negative values in an exponential way for Re lower than 10^6. According to that they chose parameters in their equation (36):

$$\lambda = \frac{0.2479 - 0.0000947 \cdot (7 - \log_{10} \mathrm{Re})^4}{\left(\log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.615 \cdot D} + \frac{7.366}{\mathrm{Re}^{0.9142}} \right) \right)^2} \tag{36}$$

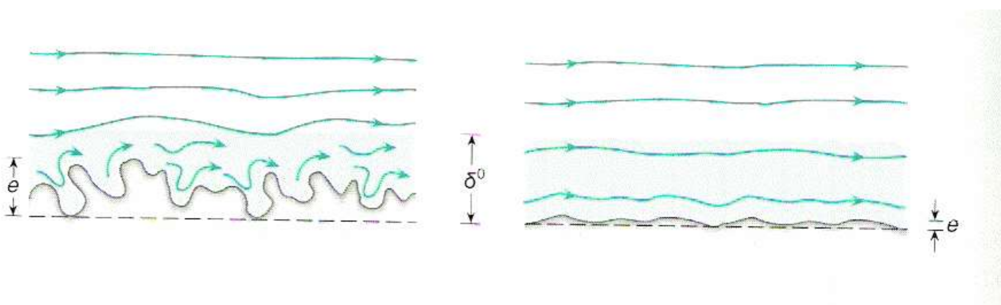
Τυρβώδης ροή σε σωλήνες με τραχύτητα



Η τραχύτητα υπάρχει και μετριέται σε mm (απόλυτη) ή σχετική ως προς τη διάμετρο. Είναι μέτρο παρέκλισης πραγματικού τοιχώματος από το ιδεατό.

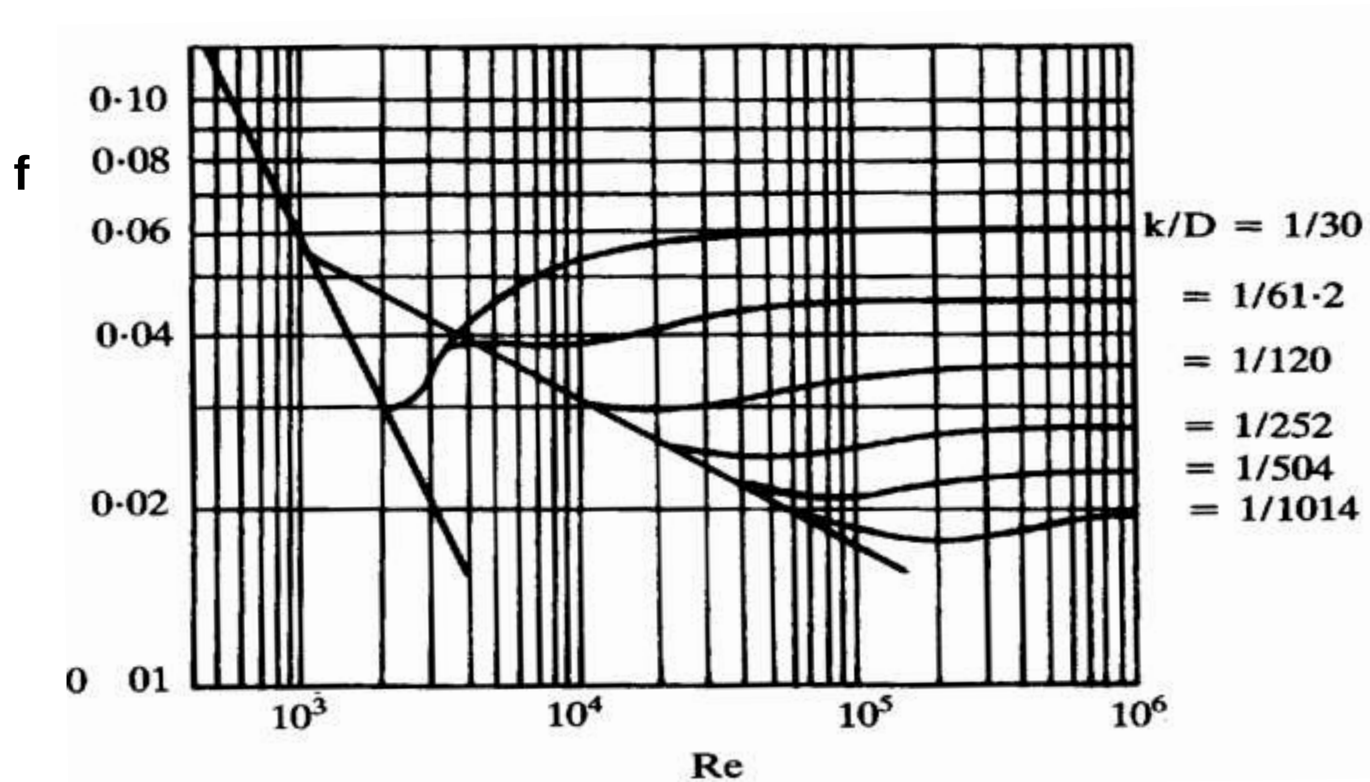
Κύριος λόγος για την πτώση πίεσης: Δυνάμεις πίεσης όταν το ρευστό περιρέει τις προεξοχές και σχηματίζονται νεκροί χώροι στις εσοχές.

Στρωτή ροή = αμελητέα επίδραση



Επίδραση της σχετικής τραχύτητας σε μεγάλους Re

Σχετική τραχύτητα ε/D



Σχέση Von-Karman – Nikuradse: $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{f}}} = 2\log\left(\frac{D}{\varepsilon}\right) + 1.74$

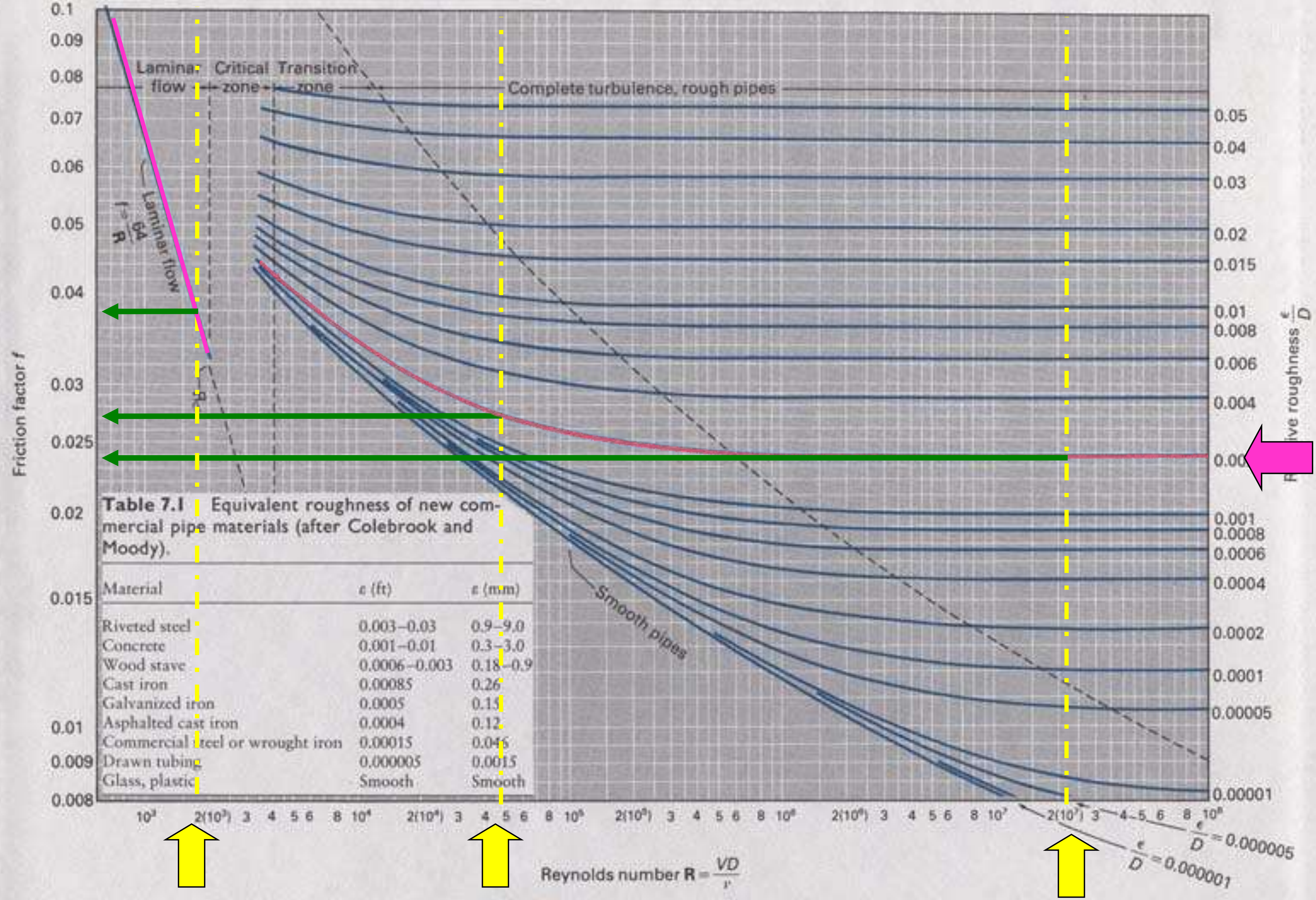


Table 7.1 Equivalent roughness of new commercial pipe materials (after Colebrook and Moody).

Material	ε (ft)	ε (mm)
Riveted steel	0.003–0.03	0.9–9.0
Concrete	0.001–0.01	0.3–3.0
Wood stave	0.0006–0.003	0.18–0.9
Cast iron	0.00085	0.26
Galvanized iron	0.0005	0.15
Asphalted cast iron	0.0004	0.12
Commercial steel or wrought iron	0.00015	0.046
Drawn tubing	0.000005	0.0015
Glass, plastic	Smooth	Smooth

Figure 7.9 The Moody chart for friction factor.

Ασκηση

Υγρό πυκνότητας 1280 kg/m^3 και δυναμικού ιξώδους 0.008 kg/(m.sec) ρέει σε κυκλικό αγωγό διαμέτρου 0.12 m και τραχύτητας 0.1 mm. Αν η ογκομετρική παροχή είναι 1200 lt/min, υπολογίστε τις γραμμικές απώλειες σε μήκος 2500 m του σωλήνα.

Η παροχή είναι 1200 lt/min, δηλαδή 1200/60000 m^3/sec= 0.02 m^3/sec.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση ταχύτητα στον αγωγό: $V = 4Q / \pi D^2 = 1.768$ *m/sec*

Το κινηματικό ιξώδες είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό του αριθμού Re: $\nu=\mu/\rho = 0.008/1280 = 6.25 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$

και κατόπιν $Re = V D / \nu = 33953 = 3.4 \cdot 10^4$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή f, μας χρειάζεται εκτός από τον αριθμό Re, και η σχετική τραχύτητα:

$(e/D) = 0.1/120 = 8.33 \cdot 10^{-4}$.

Με τα δεδομένα της σχετικής τραχύτητας και του Re, βρίσκουμε συντελεστή απωλειών $f = 0.025$.

Οι απώλειες ενέργειας είναι $\Delta h = f \ (L/D)\ (V^2/2g) = 0.025 \cdot (2500/0.12) \cdot (1.768^2/19.62) = 83{,}0\ m$

Ασκηση

Για την μεταφορά παροχής νερού ίσης με 1750 cm^3/sec, μπορούμε να διαθέσουμε **λείους** αγωγούς από PVC τριών διαφορετικών ονομαστικών διαμέτρων που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Η επιτρεπόμενη μέση ταχύτητα είναι από 0.5 έως 1.9 m/s. Να βρεθεί με ποιά, ή με ποιές από αυτές τις διαμέτρους η ταχύτητα είναι μέσα στις επιτρεπόμενες τιμές. Για τη διάμετρο ή τις διαμέτρους αυτές, να βρεθεί το ύψος των απωλειών ενέργειας σε 100 m μήκους του αγωγού ή των αγωγών (κινηματικό ιξώδες νερού v=10^{-6} m^2/s).

α/α	Ονομαστική διάμετρος (mm)	Πάχος τοιχώματος (mm)	Εσωτερική διάμετρος (mm)
1	50	1.5	47
2	63	1.9	59.2
3	75	2.2	70.6

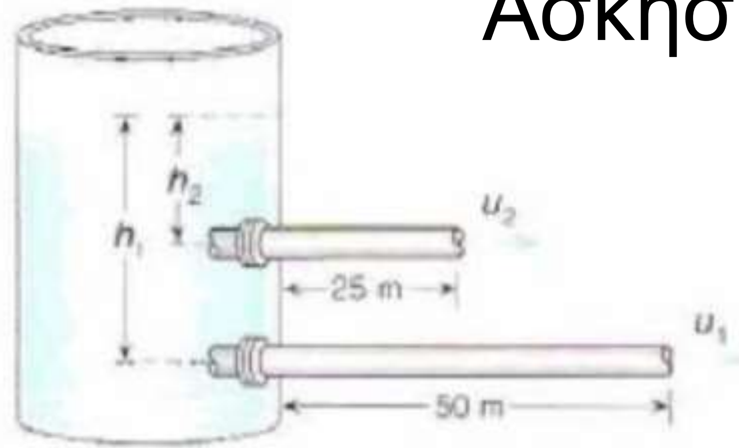
$$V = \frac{4Q}{\rho D^2} \qquad \mathrm{Re} = \frac{VD}{n} \qquad DH = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

Q(m3/sec)	V50	V63	V75	Re50	Re63	Re75	logRe50	logRe63	logRe75	f50	f63	f75	ΔH50	ΔH63	ΔH75
0,001750	1,009	0,636	0,447	47408	37638	31560	4,68	4,58	4,5	0,0214	0,0224	0,0232	2,36	0,78	0,33

Ασκηση

Από τη δεξαμενή του σχήματος, εκρέουν δύο αγωγοί, οι οποίοι έχουν εσωτερική διάμετρο 5 cm. Η παροχή του αγωγού 2, που έχει μήκος L_2= 25 m είναι Q_2= 1.5 lt/sec και αυτή του αγωγού 1, με μήκος L_1= 50 m είναι Q_1= 2.0 lt/sec. Να υπολογιστούν τα ύψη h_1 και h_2.

(μονάδες 4.0).



Από την εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας στην δεξαμενή και στην έξοδο καθενός από τους δύο αγωγούς, προκύπτει:

$$\frac{p_{\delta\epsilon\xi}}{\gamma} + h_{\delta\epsilon\xi} + \frac{U_{\delta\epsilon\xi}^2}{2g} = \frac{p_{\alpha\tau\mu}}{\gamma} + h_{\epsilon\xi} + \frac{U_1^2}{2g} + \Sigma\,\Delta\,h$$

Αφού αναλυθεί το ΣΔh σε γραμμικές και τοπικές απώλειες, μηδενιστούν η πίεση στην δεξαμενή, η πίεση στην έξοδο, η ταχύτητα στη δεξαμενή και αντικατασταθεί η διαφορά των υψομέτρων από το h_1:

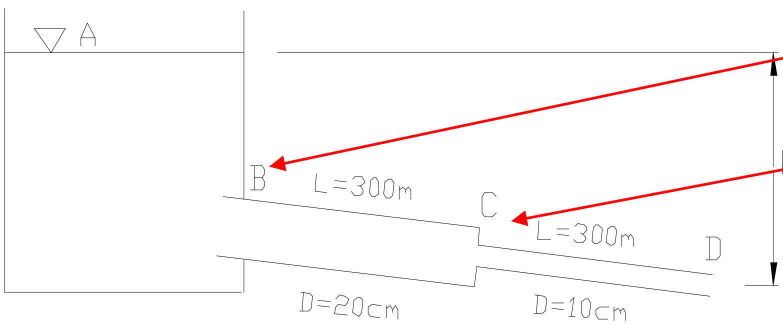
$$h_1 = \frac{U_1^2}{2g} + k\frac{U_1^2}{2g} + f\frac{L}{D}\cdot\frac{U_1^2}{2g}$$

και αντίστοιχα για το ύψος h_2.

Q1	Q2	U1	U2	Re1	Re2	f1	f2	h1	h2
0,0020	0,0015	1,02	0,76	50930	38197	0,0210	0,0218	1,2136	0,3837

Ασκηση

Μιά σωλήνωση BCD μήκους 600 m εκρέει ελεύθερα σε σημείο που βρίσκεται h = 2500 cm κάτω από τη στάθμη της δεξαμενής του σχήματος. Η είσοδος του σωλήνα προεξέχει στο εσωτερικό της δεξαμενής. Τα πρώτα 300 m έχουν διάμετρο 20 cm και τα υπόλοιπα 300 m έχουν διάμετρο 10 cm. Βρείτε την παροχή της εκροής, εάν ο συντελεστής των Darcy – Weisbach είναι σε όλο το μήκος της BCD ίσος με f=0.03.



K=1 (προεξ), ή K=0.8

K=0.25 ή 0.37

$$h = \frac{V_D^2}{2g} + f\frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} + f\frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g} + K_B\frac{V_1^2}{2g} + K_C\frac{V_2^2}{2g}$$

Επίσης, η διάμετρος του πρώτου τμήματος είναι διπλάσια από του δεύτερου, που σημαίνει ότι η ταχύτητα στο δεύτερο είναι τετραπλάσια από αυτήν στο πρώτο: $V_2 = 4\,V_1$ *και* $V_2^2 = 16\,V_1^2$

Αντικαθιστώντας όλα τα παραπάνω, βρίσκουμε την

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gh}{f\frac{L_1}{D_1} + f\frac{16L_2}{D_2} + 20.8}}$$

οπότε

$$V_1 = \sqrt{0.0130629}$$

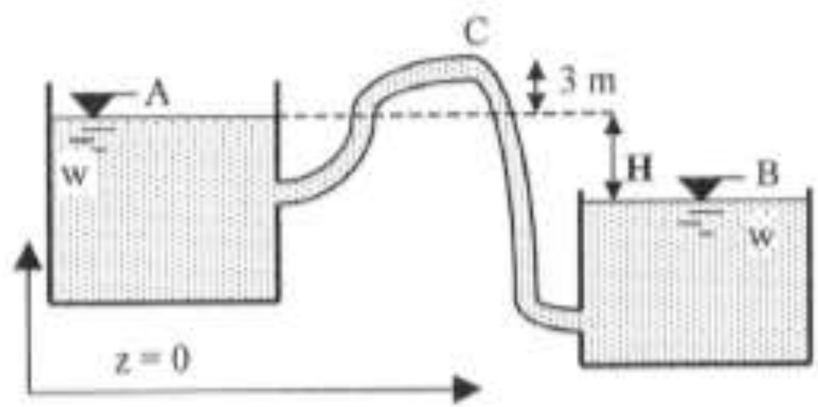
Στη συνέχεια, από την ταχύτητα προκύπτει η παροχ

$$Q = V_1\,\pi D_1^2/4 = \pi\,V_1/100$$

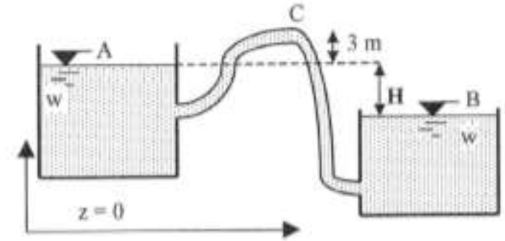
V1=0.571m/s, Q=0.0179m3/s

Ένας αγωγός μήκους L = 720 m και διαμέτρου D = 1.2 m συνδέει δύο δεξαμενές A και B που έχουν σταθερή διαφορά στάθμης H = 6 m. Σε κάποια θέση C, 240 m από τη δεξαμενή A, ο αγωγός υψώνεται 3 m πάνω από τη στάθμη της. Αν ο συντελεστής απωλειών των Darcy-Weisbach είναι f = 0.04 να υπολογιστεί η παροχή, καθώς και η πίεση στο σημείο C. Να αγνοηθούν οι τοπικές απώλειες.

$$H_A = H_B + \sum h \Rightarrow z_A + \frac{p_A}{w} + \frac{v_A}{2g}$$



$$z_A - z_B = H = f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} \Rightarrow 6 = 0.04\frac{720}{1.2}\frac{v^2}{2*9.81} \Rightarrow v = 2.22 \text{ m/sec.}$$



Επομένως η παροχή του αγωγού είναι

$$Q = S.v = \frac{\pi.D^2}{4}.v \Rightarrow Q = \frac{3.14*1.2^2}{4}*2.22 \Rightarrow Q = 2.51 \text{ m}^3\text{/sec.}$$

Για να υπολογίσουμε την πίεση στο σημείο C, εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli ανάμεσα στις θέσεις A και C.

$$z_A + \frac{p_A}{w} + \frac{v_A^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{w} + \frac{v_C^2}{2g} + f\frac{L_1}{D}\frac{v^2}{2g}, \qquad \text{όπου } L_1 = 240 \text{ m.}$$

Αλλά σύμφωνα με τα προηγούμενα

$p_A = 0$, $v_A = 0$, $z_A - z_C = -3$ m και $v_C = v = 2.22$ m/sec.

Άρα $\frac{p_C}{w} = (z_A - z_C) - \frac{v^2}{2g}.(1 + f\frac{L_1}{D}) \Rightarrow \frac{p_C}{w} = -5.26$ m νερου

$$\Rightarrow \mathbf{p_C} = -5.26 * 9.81 = \mathbf{-51.6\ kN/m^2}.$$