Εφαρμογές της εξίσωσης γραμμικής ορμής

Σε προβλήματα υδραυλικής είναι πολλές φορές απαραίτητο να γνωρίζουμε τη δύναμη που ασκείται πάνω σε κάποιο στερεό σώμα εξαιτίας της κίνησης μιας μάζας ρευστού.

Η δύναμη αυτή μπορεί να υπολογιστεί από το **νόμο της γραμμικής ορμής** (δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, κεφάλαιο 3.9), ο οποίος στη γενική του μορφή αναφέρει ότι

το άθροισμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν πάνω σε έναν όγκο αναφοράς (control volume) είναι ίσο με την ανά μονάδα χρόνου μεταβολή της γραμμικής ορμής στον όγκο αυτό.

Στις εξωτερικές δυνάμεις, περιλαμβάνονται οι δυνάμεις πίεσης $\mathbf{F_p}$, τριβής $\mathbf{F_\tau}$ και βαρύτητας $\mathbf{F_g}$, καθώς και η δύναμη (αντίδραση) $\mathbf{F}$ που ασκείται από κάποιο στερεό σώμα πάνω στο ρευστό.

Επομένως ο νόμος της γραμμικής ορμής μπορεί να γραφτεί σε διανυσματική μορφή

$$\boxed{\Sigma\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{F}}_{\tau} + \overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{g}} + \overline{\mathbf{F}} = \rho.\mathbf{Q}(\overline{\mathbf{v}}_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\eta} - \overline{\mathbf{v}}_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\eta}).} \quad (6.1)$$

Στις επόμενες ασκήσεις το ρευστό θεωρείται τέλειο και επομένως δεν υπάρχουν δυνάμεις τριβής.

Μεταβολή της γραμμικής ορμής: $\rho\ Q\ (v_{\tau\varepsilon\lambda}-v_{\alpha\rho\chi}) = \rho\ s\ v\ (v_{\tau\varepsilon\lambda}-v_{\alpha\rho\chi})$

Άσκηση 6.1

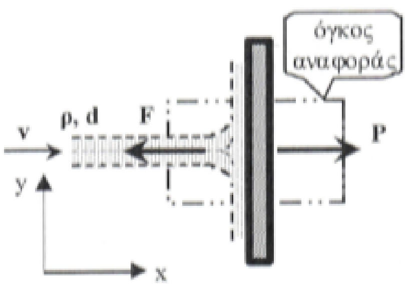
Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται από μία μάζα ρευστού (πίδακας) η οποία πέφτει κάθετα πάνω σε επίπεδη ακίνητη πλάκα. Διάμετρος πίδακα d = 50 mm, ταχύτητα v = 6.3 m/sec, πυκνότητα ρευστού $\rho = 10^3$ kg/m³.

Λύση.

Όταν ο πίδακας πέφτει πάνω στην πλάκα, το ρευστό δεν ανακλάται αλλά διασκορπίζεται παράλληλα προς αυτή.

Η πίεση p του ρευστού μπορεί να θεωρηθεί ατμοσφαιρική, ίση με το μηδέν και να παραληφθεί.

Το βάρος του θεωρείται αμελητέο.



Η δύναμη P που ασκείται από το ρευστό πάνω στην πλάκα, προκαλεί μία ίση και αντίθετη αντίδραση F.

Κατά τη διεύθυνση y η εξίσωση (6.1) ικανοποιείται εκ ταυτότητας.

Κατά τη διεύθυνση x θα έχουμε

μάζα ρευστού που πέφτει στην πλάκα /sec = m = ρ.Q = ρ.s.v,

αρχική ταχύτητα πίδακα = v,

τελική ταχύτητα πίδακα = 0 (το ρευστό αποκτά την ταχύτητα της πλάκας),

μεταβολή της γραμμικής ορμής $= \rho.Q.(v_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - v_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}) =$

$= \rho.s.v.(0 - v) = -\rho.s.v^2$

και η εξίσωση της γραμμικής μεταβολής της ορμής δίνει :

$$\Sigma F_x = \overset{0}{\cancel{F_{px}}} + \overset{0}{\cancel{F_{\tau x}}} + \overset{0}{\cancel{F_{gx}}} - F_x = \rho.Q(v_{x\,\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\eta} - v_{x\,\alpha\rho\chi\iota\kappa\eta}).$$

$$-F = -\rho.s.v^2 \Rightarrow F = \rho.s.v^2.$$

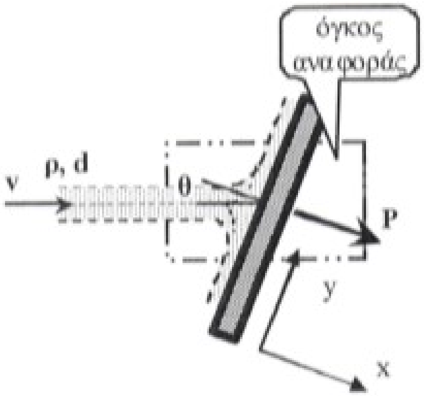
Άρα η δύναμη P που ασκείται από το ρευστό πάνω στην πλάκα είναι

$$\mathbf{P = \rho.s.v^2} = (10^3 \text{ kg/m}^3) . (\pi * 0.05^2/4) . 6.3^2 = \mathbf{78\ N}.$$

Μεταβολή της γραμμικής ορμής: $\rho\ Q\ (v_{\tau\varepsilon\lambda}-v_{\alpha\rho\chi}) = \rho\ s\ v\ (v_{\tau\varepsilon\lambda}-v_{\alpha\rho\chi})$

Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται από πίδακα νερού, ο οποίος κτυπά πάνω σε επίπεδη πλάκα υπό γωνία θ με ταχύτητα v, (α) όταν η πλάκα είναι ακίνητη και (β) όταν η πλάκα κινείται παράλληλα κατά τη διεύθυνση του πίδακα με ταχύτητα u (v > u).

Λύση.



(α) Κατά τη διεύθυνση x,

μάζα ρευστού που πέφτει στην πλάκα / sec = m = ρ.Q = ρ.s.v,

αρχική ταχύτητα πίδακα κάθετα προς την πλάκα = v.cos θ,

τελική ταχύτητα πίδακα κάθετα προς την πλάκα = 0 (το ρευστό αποκτά την ταχύτητα της πλάκας),

Πλάκα ακίνητη

μεταβολή της γραμμικής ορμής κάθετα προς την πλάκα =

$$= \rho.s.v.(v_{\text{τελική}} - v_{\text{αρχική}}) = \rho.s.v.(0 - v.\cos\theta) = -\rho.s.v^2.\cos\theta$$

και η εξίσωση της γραμμικής μεταβολής της ορμής δίνει :

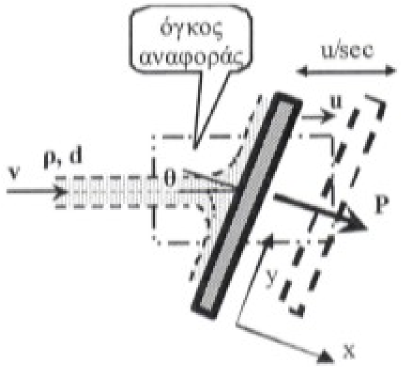
$$-F = -\rho.s.v^2.\cos\theta \Rightarrow \mathbf{P = F = \rho.s.v^2.\cos\theta}\ .$$

Μεταβολή της γραμμικής ορμής: $\rho\ Q\ (v_{\tau\varepsilon\lambda}-v_{\alpha\rho\chi}) = \rho\ s\ v\ (v_{\tau\varepsilon\lambda}-v_{\alpha\rho\chi})$

(β) Κατά τη διεύθυνση x,

μάζα ρευστού που πέφτει στην πλάκα / sec = m = ρ.Q = ρ.s.(v - u),

αρχική ταχύτητα πίδακα κάθετα προς την πλάκα = v.cos θ,



τελική ταχύτητα πίδακα κάθετα προς την πλάκα = u.cos θ

(το ρευστό αποκτά την ταχύτητα της πλάκας),

μεταβολή της γραμμικής ορμής κάθετα προς την πλάκα =

$= \rho.s.(v - u).(v_{\tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - v_{\alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}) =$

$= \rho.s.(v - u).(u.\cos\theta - v.\cos\theta) =$

$= - \rho.s.(v - u)^2.\cos\theta$

Πλάκα σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα u

και η εξίσωση της γραμμικής μεταβολής της ορμής δίνει :

$$-F = -\rho.s.(v - u)^2.\cos\theta \Rightarrow \mathbf{P = F = \rho.s.(v - u)^2.\cos\theta}\ .$$

Κατά τη διεύθυνση y η σχέση (6.1) ικανοποιείται εκ ταυτότητας επειδή το ρευστό θεωρείται τέλειο και επομένως δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής.

Μεταβολή της γραμμικής ορμής: $\rho\ Q\ (v_{\tau\varepsilon\lambda} - v_{\alpha\rho\chi}) = \rho\ s\ v\ (v_{\tau\varepsilon\lambda} - v_{\alpha\rho\chi})$

Άσκηση 6.3

Πίδακας νερού με ταχύτητα v = 15 m/sec προσκρούει σε ακίνητο πτερύγιο, του οποίου η τομή έχει μορφή κυκλικού τόξου υπό γωνία 120^0. Να υπολογιστεί το μέγεθος και η διεύθυνση της αντίδρασης του πτερυγίου, όταν η προσπίπτουσα μάζα του νερού είναι 0.45 kg/sec, υποθέτοντας ότι η ταχύτητα του πίδακα, σε σχέση με το πτερύγιο, παραμένει σταθερή.

Κατά τη διεύθυνση x έχουμε :

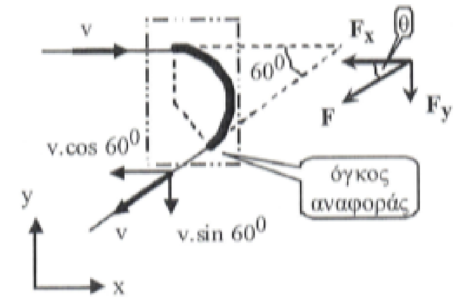
αρχική ταχύτητα = v, τελική ταχύτητα = $-v.\cos 60^0$,

μεταβολή της γραμμικής ορμής

$$= m.(v_{τελική} - v_{αρχική}) = m.(-v.\cos 60^0 - v) = -m.v.(1 + \cos 60^0).$$

Άρα $\mathbf{F_x} = m.v.(1 + \cos 60^0) =$

$0.45*15*(1 + \cos 60^0) =$ **10.1 N**.



Κατά τη διεύθυνση y έχουμε :

αρχική ταχύτητα = 0,

τελική ταχύτητα = $-v.\sin 60^0$,

μεταβολή της γραμμικής ορμής =

$$m.(v_{τελική} - v_{αρχική}) = m.(-v.\sin 60^0 - 0) = -m.v.\sin 60^0 .$$

Άρα $\mathbf{F_y} = m.v.\sin 60^0 = 0.45*15*\sin 60^0 =$ **5.84 N**.

Η συνισταμένη $\mathbf{F} = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2} =$ **11.7 N**

και η κλίση της $\tan\theta = F_y/F_x = 5.84/10.1 = 0.578 \Rightarrow$ $\boldsymbol{\theta = 30^0}$.

Μεταβολή της γραμμικής ορμής: $\rho\ Q\ (v_{τελ}-v_{αρχ}) = \rho\ s\ v\ (v_{τελ}-v_{αρχ})$

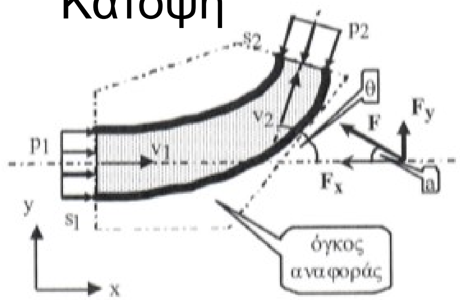
Άσκηση 6.4

Να υπολογιστεί το μέτρο και η διεύθυνση της δύναμης που ασκείται σε καμπύλο τμήμα σωληνωτού αγωγού, με βαθμιαία μεταβαλλόμενη διάμετρο. (Καμπύλο κατά την οριζόντια έννοια, δηλαδή βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο)

Λύση.

Στο παράδειγμα αυτό, η ροή είναι περιορισμένη και επομένως η πίεση μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο και πρέπει να ληφθούν υπόψη οι αντίστοιχες δυνάμεις.

Κάτοψη



Έτσι, η γειτονική προς τον όγκο αναφοράς ποσότητα ρευστού, ασκεί πιέσεις p_1 και p_2, αντίστοιχα, στις διατομές s_1 και s_2.

Οι υψομετρικές διαφορές θεωρούνται αμελητέες.

Το βάρος του ρευστού ασκείται κάθετα προς το επίπεδο του σχήματος και κατά συνέπεια δεν επηρεάζει τη μεταβολή της γραμμικής ορμής.

Κατά τον άξονα των x έχουμε : $F_{px} - F_x = \rho.Q.(v_{x\ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - v_{x\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}})$.

(Εξίσωση ορμής)

Αλλά $F_{px} = p_1.s_1 - p_2.s_2.\cos\theta$

(η δύναμη της πίεσης)

και η γραμμική μεταβολή της ορμής είναι

$$\rho.Q.(v_{x\ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - v_{x\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}) = \rho.Q.(v_2.\cos\theta - v_1).$$

Άρα

$$F_{px} - F_x = \rho.Q.(v_{x\ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - v_{x\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}) \Rightarrow F_x = F_{px} - \rho.Q.(v_{x\ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - v_{x\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}})$$

$$\Rightarrow \mathbf{P_x = F_x = p_1.s_1 - p_2.s_2.\cos\theta - \rho.Q.(v_2.\cos\theta - v_1).}$$

Κατά τον άξονα των y έχουμε :

$F_{py} = -p_2.s_2.\sin\theta$ (η δύναμη της πίεσης)

και η γραμμική μεταβολή της ορμής είναι ίση με

$$\rho.Q.(v_{y\ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - v_{y\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}) = \rho.Q.v_2.\sin\theta.$$

Άρα

$$F_{py} + F_y = \rho.Q.(v_{y\ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - v_{y\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}) \Rightarrow F_y = \rho.Q.(v_{y\ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\acute{\eta}} - v_{y\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\acute{\eta}}) - F_{py}$$

(Εξίσωση ορμής)

$$\Rightarrow \mathbf{P_y = F_y = \rho.Q.v_2.\sin\theta + p_2.s_2.\sin\theta.}$$

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο καμπύλο τμήμα του αγωγού είναι

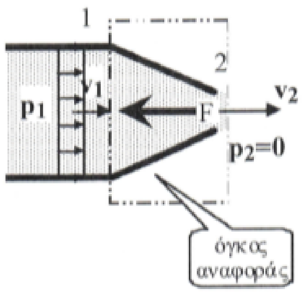
$$P = (P_x^2 + P_y^2)^{1/2} \quad \text{και} \quad \tan a = P_y/P_x.$$

Μεταβολή της γραμμικής ορμής: $\rho\ Q\ (v_{\tau\varepsilon\lambda} - v_{\alpha\rho\chi}) = \rho\ s\ v\ (v_{\tau\varepsilon\lambda} - v_{\alpha\rho\chi})$

Άσκηση 6.5

Μια πυροσβεστική μάνικα διαμέτρου 10 cm ρίχνει νερό με ρυθμό 1.5 m^3/min από ακροφύσιο διαμέτρου 3 cm. Να υπολογιστεί η δύναμη που πρέπει να βάλουν οι πυροσβέστες για να κρατήσουν τη μάνικα.

Λύση



$Q = 1.5\ m^3/min = 0.025\ m^3/s.$

$$Q = s_1.v_1 = \frac{\pi.D_1^2}{4}.v_1 \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi.D_1^2} = \frac{4*0.025}{\pi*0.1^2} = 3.2\,m/s.$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi.D_2^2} = \frac{4*0.025}{\pi*0.03^2} = 35.4\,m/s.$$

Από την εξίσωση Bernoulli έχουμε ($z_1 = z_2$, $p_2 = 0$):

$$\cancel{z_1} + \frac{p_1}{w} + \frac{v_1^2}{2g} = \cancel{z_2} + \cancel{\frac{p_2}{w}} + \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow$$

$$p_1 = \frac{w}{2g}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{9810\,N/m^3}{2*9.81\,m/s^2}[(35.4\,m/s)^2 - (3.2\,m/s)^2] \Rightarrow$$

$$p_1 = 621460\ N/m^2.$$

Η εξίσωση γραμμικής ορμής δίνει :

Μεταβολή της γραμμικής ορμής = αντίδραση + δύναμη πίεσης

$$-F + p_1.s_1 = \rho.Q.(v_2 - v_1) \Rightarrow F = p_1.s_1 - \rho.Q.(v_2 - v_1) \Rightarrow$$

$$F = 621460\,kN/m^3 * \frac{\pi.(0.1\,m)^2}{4} - 1000\,kg/m^3 * 0.025\,m^3/s.(35.4\,m - 3.2\,m) \Rightarrow$$

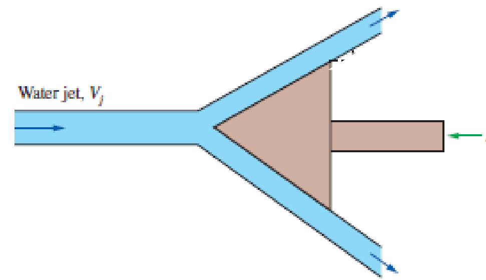
$$\mathbf{F = 4076\,N}$$

Μεταβολή της γραμμικής ορμής: $\rho\ Q\ (v_{τελ} - v_{αρχ}) = \rho\ s\ v\ (v_{τελ} - v_{αρχ})$

Από οριζόντιο ακροφύσιο βγαίνει φλέβα νερού διαμέτρου 15cm που κτυπάει επάνω σε κωνικό σώμα. Η γωνία του κώνου είναι 60° και η οριζόντια δύναμη που απαιτείται για να παραμείνει το κωνικό σώμα στη θέση του είναι 20N. Να προσδιοριστεί η παροχή του ακροφυσίου.

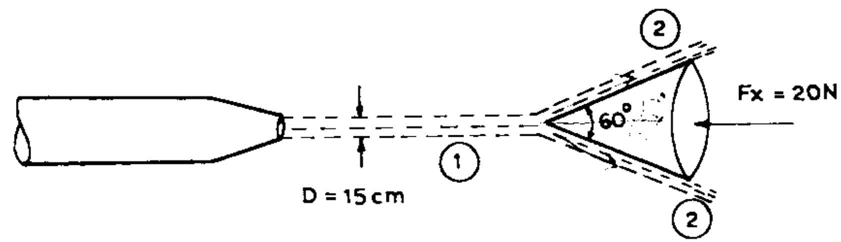
Εφαρμόζοντας την εξίσωση ενέργειας μεταξύ των διατομών 1 και 2:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow \mathrm{V}_1 = V_2 = V$$



Από την εξίσωση της ποσότητας κίνησης:

$$-F_x = \rho Q(V cos(30^o) - V)$$



Αλλά, είναι:

$$Q = AV = \frac{\pi D^2}{4}V = \frac{\pi * 0.15^2}{4}V = 0.018\mathrm{V}$$

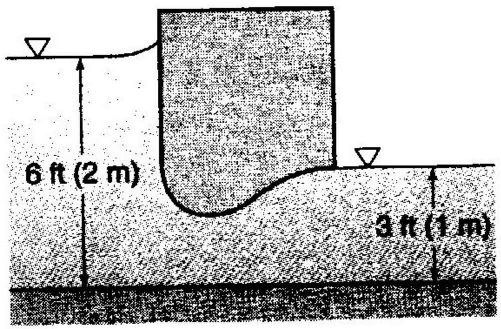
Οπότε η εξίσωση της ποσότητας κίνησης γίνεται:

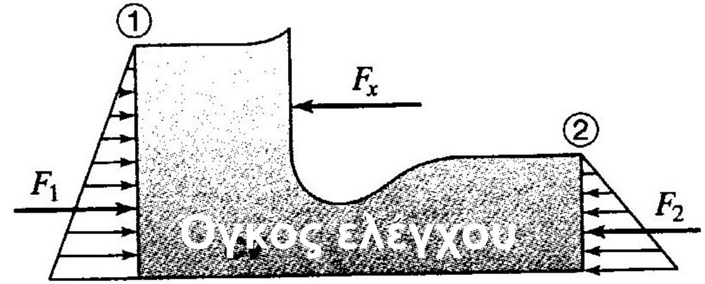
$$-20 = 1000 * 0.018V * (Vcos(30^o) - V) \Rightarrow V^2 = 8.2919 \Rightarrow V = 2.88 m/s$$

Και:

$$Q = 0.018V = 0.0518 m^3/s$$

Η διέλευση του νερού στο σχήμα, έχει πλάτος (κάθετα στο σχήμα) με b=3m. Να υπολογιστεί η οριζόντια δύναμη που ασκείται στο δόμημα. Η ροή θεωρείται ιδανική.





Σε ροή ελεύθερης επιφάνειας και όταν οι ροϊκές γραμμές είναι παράλληλες, η υδάτινη επιφάνεια συμπίπτει με την πιεζομετρική γραμμή. Εφαρμόζοντας την εξίσωση της ενέργειας ανάμεσα στις διατομές 1 και 2:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow \mathrm{z}_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \mathrm{z}_2 + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow V_2^2 - V_1^2 = 2g(z_1 - z_2) = 19.62(^m/_s)^2$$

Και αντίστοιχα την εξίσωση της συνέχειας:

$$\mathrm{A}_1\mathrm{V}_1 = \mathrm{A}_2\mathrm{V}_2 \Rightarrow z_1 b V_1 = z_2 b V_2 \Rightarrow 6V_1 = 3V_2 \Rightarrow V_2 = 2V_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} 3V_1^2 = 19.62 \Rightarrow V_1 = 2.557\,^m/_s$$

$$V_2 = 5.115\,^m/_s$$

Οπότε η παροχή:

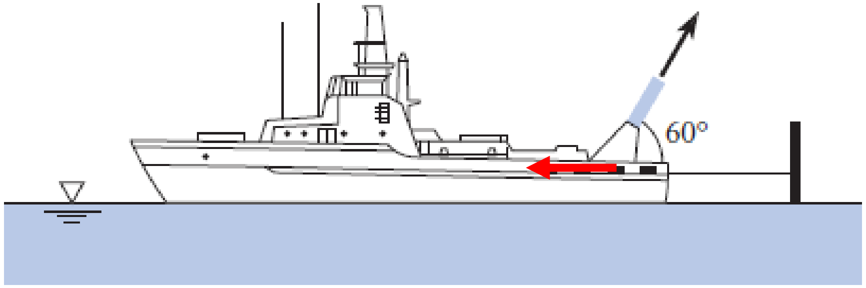
$$Q = A_1V_1 = A_2V_2 = 15.34\,^{m^3}/_s$$

Η εξίσωση της ορμής σε διάγραμμα ελεύθερου σώματος:

$$\mathrm{F}_1 - F_2 - F_x = \rho Q(V_2 - V_1) \Rightarrow \gamma z_{k1}(z_1 b) - \gamma z_{k2}(z_2 b) - F_x = 1000 * 15.34 * (5.115 - 2.557) \Rightarrow$$

$$9810 * 1 * 2 * 3 - 9810 * 0.5 * 1 * 3 - F_x = 39240 \Rightarrow F_x = 4905N$$

Το σκάφος του σχήματος είναι ακίνητο, λόγω του σχοινιού που το κρατάει δεμένο. Πίδακας κατευθύνει νερό με ταχύτητα V=50m/s. Εάν η μέγιστη επιτρεπόμενη δύναμη στο σχοινί είναι 5kN, να υπολογιστεί η μέγιστη παροχή του πίδακα, και η αντίστοιχη διάμετρός του



$$\Sigma F_x = \rho Q(V_{\tau\varepsilon\lambda} - V_{\alpha\rho\chi})$$

$$-F_x = \rho Q(V\cos(60^o) - V)$$

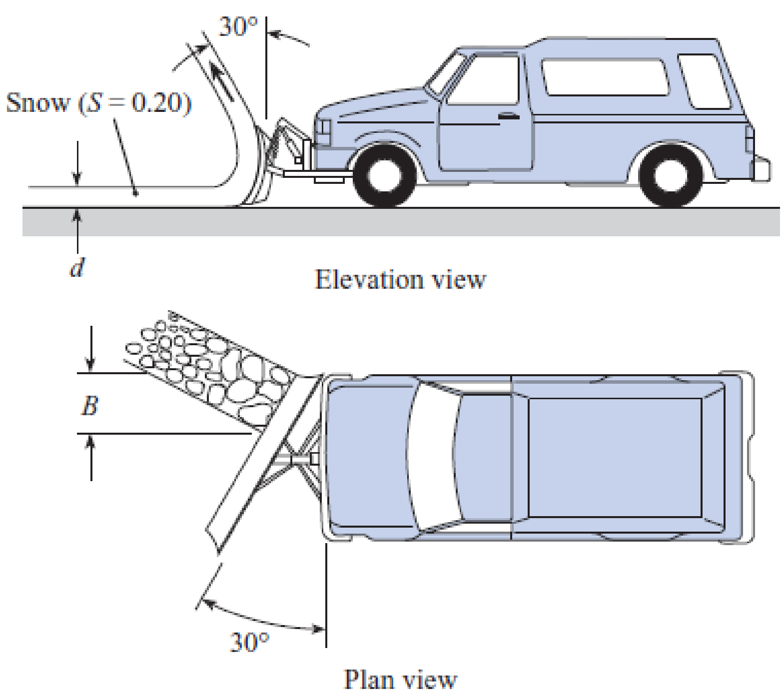
$$-F_x = \rho s V(V\cos(60^o) - 0) \Rightarrow -F_{x,max} = \rho s_{max} V^2 \frac{1}{2} = \frac{\rho V^2}{2}\frac{\pi D_{max}^2}{4} \Rightarrow$$

$$|F_{x,max}| = \frac{1000 * 2500 * 3.14}{8} D_{max}^2 = 981747 D_{max}^2 \Rightarrow D_{max} = \sqrt{\frac{5000}{981747}} = 0.0714m$$

$$Q_{max} = V\frac{\pi D_{max}^2}{4} = 0.200\, {m^3}/{s} = 200\frac{l}{s}$$

Μεταβολή της γραμμικής ορμής: $\rho\ Q\ (v_{\tau\varepsilon\lambda}\text{-}v_{\alpha\rho\chi}) = \rho\ s\ v\ (v_{\tau\varepsilon\lambda}\text{-}v_{\alpha\rho\chi})$

Το εκχιονιστικό μηχάνημα της εικόνας, καθαρίζει στρώμα χιονιού βάθους d=0.1m και πλάτους B=0.6m. Το χιόνι εκτοξεύεται από το μηχάνημα στην διεύθυνση που δείχνεται. Αγνοώντας την τριβή μεταξύ του χιονιού και του μηχανήματος, υπολογίστε την δύναμη που εφαρμόζεται στο όχημα από το χιόνι, εάν η ταχύτητα του οχήματος είναι 15m/s.



$$\Sigma F_x = \rho Q(V_{\tau\varepsilon\lambda} - V_{\alpha\rho\chi}) = Q_{mass}(V_{\tau\varepsilon\lambda} - V_{\alpha\rho\chi})$$

$$|F_x| = Q_{mass}(V_{\tau\varepsilon\lambda} - V_{\alpha\rho\chi}) = Q_{mass} V_{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$= \rho \mathrm{B d} V_{o\chi}\left(\mathrm{V}_{o\chi}\cos 60^{o}\cos 30^{o}\right)$$

$$= 1000 * 0.1 * 0.6 * 15 * 15 * 0.5 * 0.866 =$$

$$5845N$$