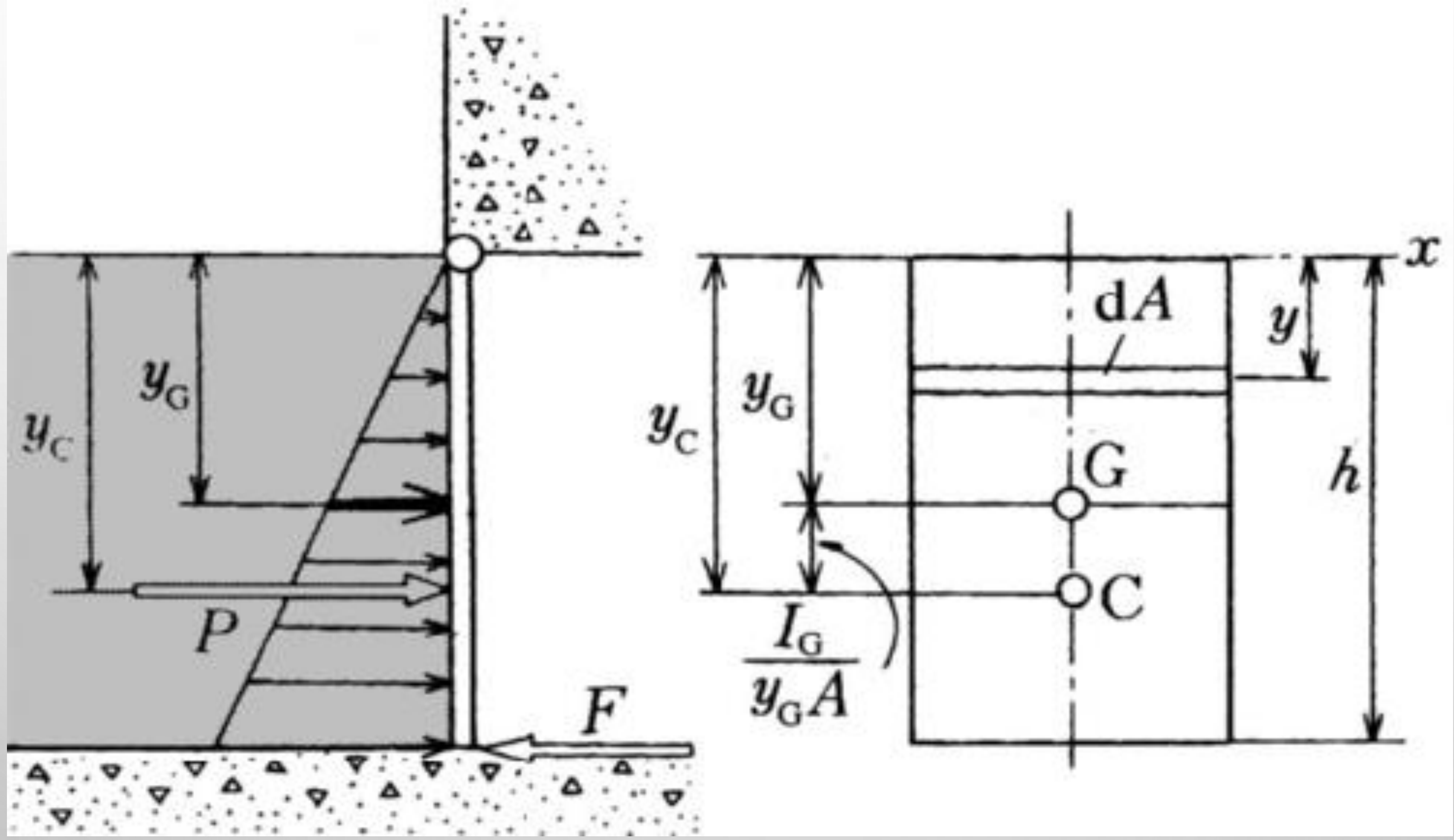
ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

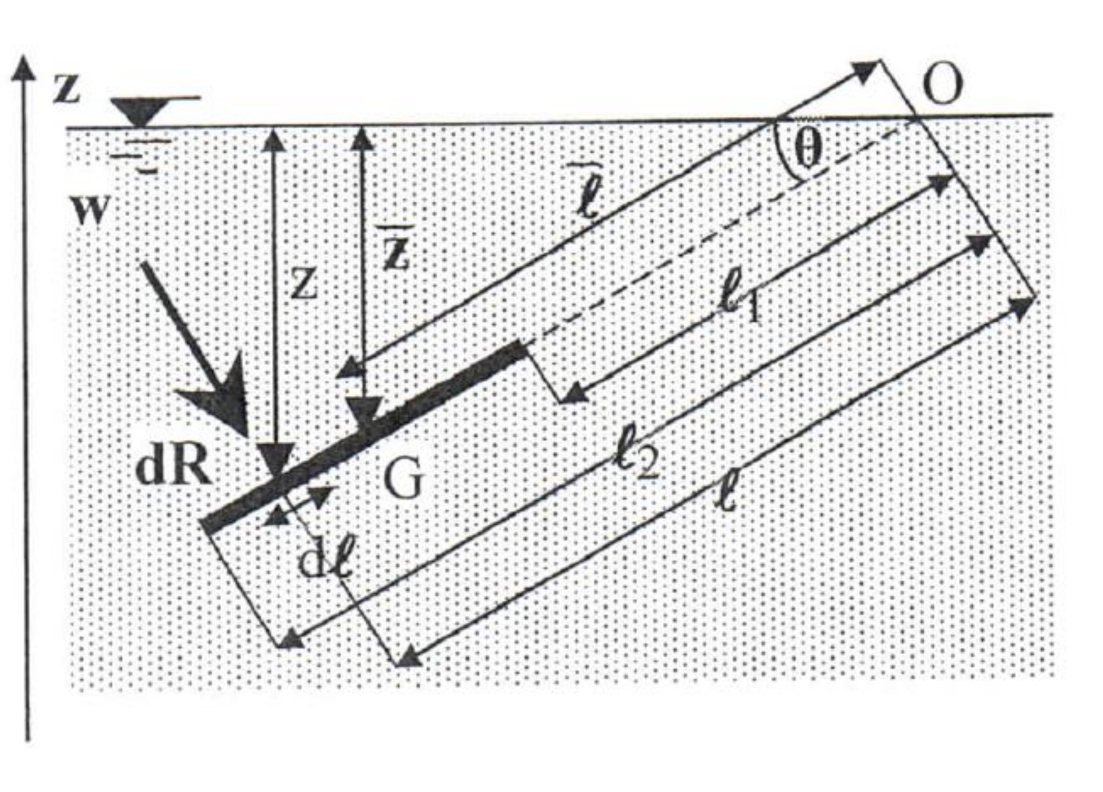
- ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ
- ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ
- ΕΠΙΠΛΕΥΣΗ

ΔΎΝΑΜΗ ΣΕ ΕΠΙΦΆΝΕΙΑ



Μέτρο υδροστατικής δύναμης σε βυθισμένη επιφάνεια

ΘΑ ΑΠΟΔΕΙΧΘΕΙ ΟΤΙ:



$$\mathbf{R} = \mathbf{w}.\mathbf{S}.\bar{\mathbf{z}} \ , \qquad (4.5)$$

όπου

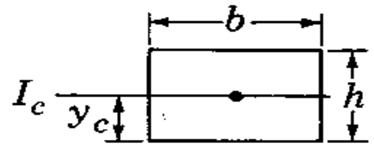
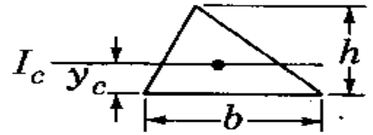
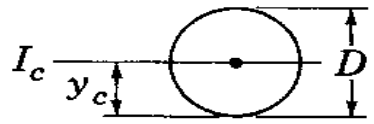
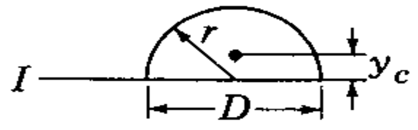
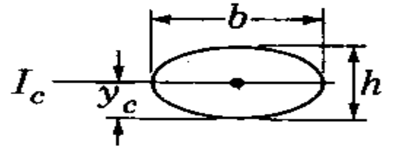
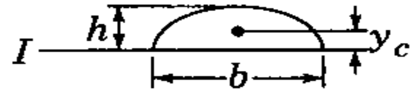
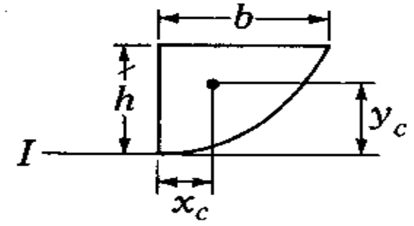
R η συνολική δύναμη της υδροστατικής πίεσης πάνω στη βυθισμένη επίπεδη επιφάνεια (κάθετη στην επιφάνεια),

w το ειδικό βάρος του ρευστού (για το νερό $w_w = 9.81$ kN/m^3),

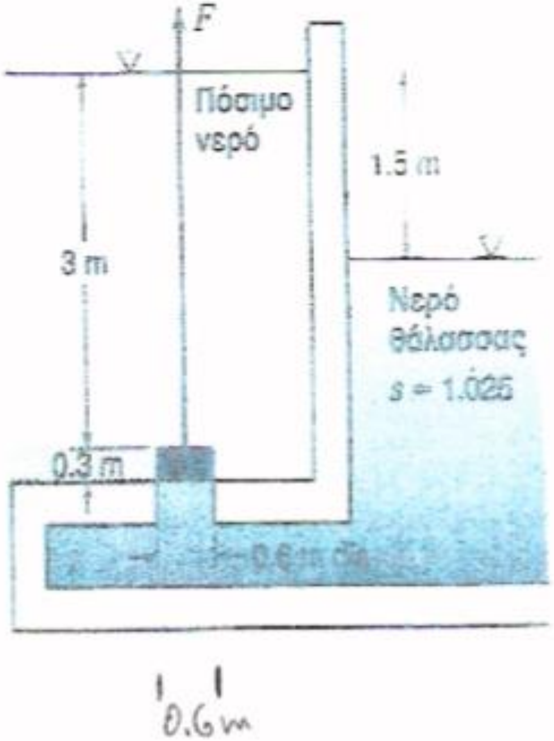
S το εμβαδόν της επίπεδης επιφάνειας,

$\bar{\mathbf{z}}$ η απόσταση του κέντρου βάρους G της βυθισμένης επιφάνειας από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού.

ΘΈΣΗ ΚΈΝΤΡΩΝ ΒΆΡΟΥΣ ΚΑΙ ΡΟΠΈΣ ΑΔΡΑΝΕΊΑΣ ΣΧΗΜΆΤΩΝ

	Sketch	Area	Location of centroid	I or I_c
Rectangle		bh	$y_c = \frac{h}{2}$	$I_c = \frac{bh^3}{12}$
Triangle		$\frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{h}{3}$	$I_c = \frac{bh^3}{36}$
Circle		$\frac{\pi D^2}{4}$	$y_c = \frac{D}{2}$	$I_c = \frac{\pi D^4}{64}$
Semicircle		$\frac{\pi D^2}{8}$	$y_c = \frac{4r}{3\pi}$	$I = \frac{\pi D^4}{128}$
Ellipse		$\frac{\pi bh}{4}$	$y_c = \frac{h}{2}$	$I_c = \frac{\pi bh^3}{64}$
Semiellipse		$\frac{\pi bh}{4}$	$y_c = \frac{4h}{3\pi}$	$I = \frac{\pi bh^3}{16}$
Parabola		$\frac{2bh}{3}$	$x_c = \frac{3b}{8}$ $y_c = \frac{3b}{5}$	$I = \frac{2bh^3}{7}$

Ροπές αδρανείας διαφόρων σχημάτων ως προς τον άξονα που περνάει από το κέντρο βάρους τους (φαίνεται σε κάθε συγκεκριμένο σχήμα)



3. Ζητείται η δύναμη που απαιτείται για την ανύψωση του ρουφράκτη σκυροδέματος που φαίνεται στο σχήμα. Το ειδικό βάρος του σκυροδέματος είναι $23.6 kN/m^3$.

Οι δυνάμεις που δρουν στον ρουφράκτη, είναι:

a) το βάρος του: $W = \gamma \forall = 23600 \cdot \pi \cdot (0{,}3)^2 \cdot 0{,}3 = \underline{2002 N}$

b) Η δύναμη λόγω του πόσιμου νερού:

$$F_{\pi o \sigma} = \gamma \cdot z_k \cdot A = 9810 \cdot 3 \cdot \pi \cdot (0{,}3)^2 = \underline{8321 N}$$

c) Η δύναμη λόγω του θαλασσινού νερού:

$$F_{\theta \alpha \lambda} = \gamma_\theta \cdot z_k' \cdot A = (1{,}025 \cdot 9810) \cdot (3{,}3 - 1{,}8) \cdot \pi \cdot (0{,}3)^2 = \underline{5117 N}$$

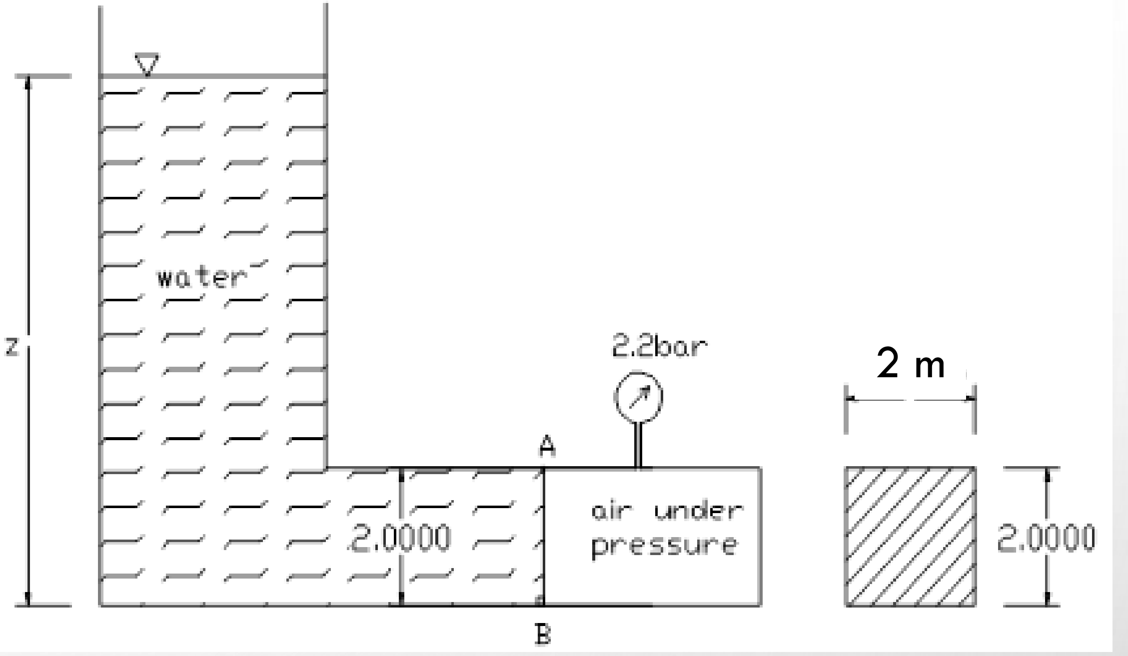
Αν F είναι η δύναμη που απαιτείται για να ανυψώσει τον ρουφράκτη, λαμβάνοντας υπόψη τη φορά κάθε δύναμης:

$$F + F_{\theta \alpha \lambda} = W + F_{\pi o \sigma} \Rightarrow F = W + F_{\pi o \sigma} - F_{\theta \alpha \lambda} = \underline{5206 N}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Στο σχήμα φαίνεται δεξαμενή νερού που καταλήγει σε ορθογωνικό θυρόφραγμα ΑΒ με ύψος 2 m και πλάτος 2 m, όπως φαίνεται στην διαγραμμισμένη όψη του. Δεξιά του θυροφράγματος υπάρχει αέρας σε απόλυτη πίεση 2.2 bar. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή του ύψους z, για την οποία το θυρόφραγμα ΑΒ θα περιστραφεί αριστερόστροφα. Εχει σημασία το πλάτος??

Υπόδειξη: πρέπει να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί από τη δεξιά πλευρά το αέριο, και στη συνέχεια να προσδιοριστεί το ύψος z ώστε η δύναμη που ασκεί το νερό να είναι ίση μ'αυτή του αερίου, λαμβάνοντας υπόψη και την ατμοσφαιρική πίεση. Η πίεση της ατμόσφαιρας μπορεί να ληφθεί ίση με 1 bar

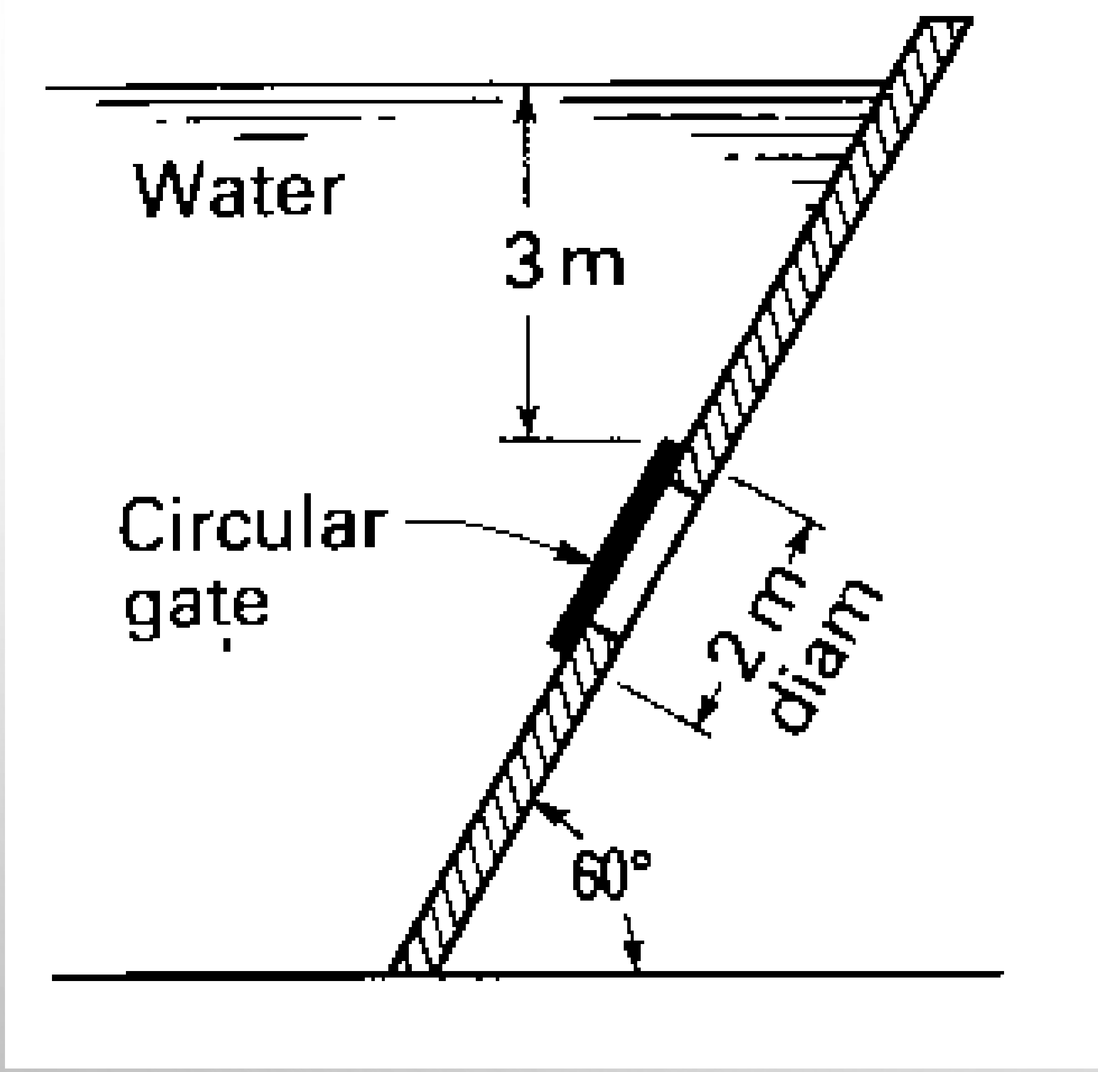


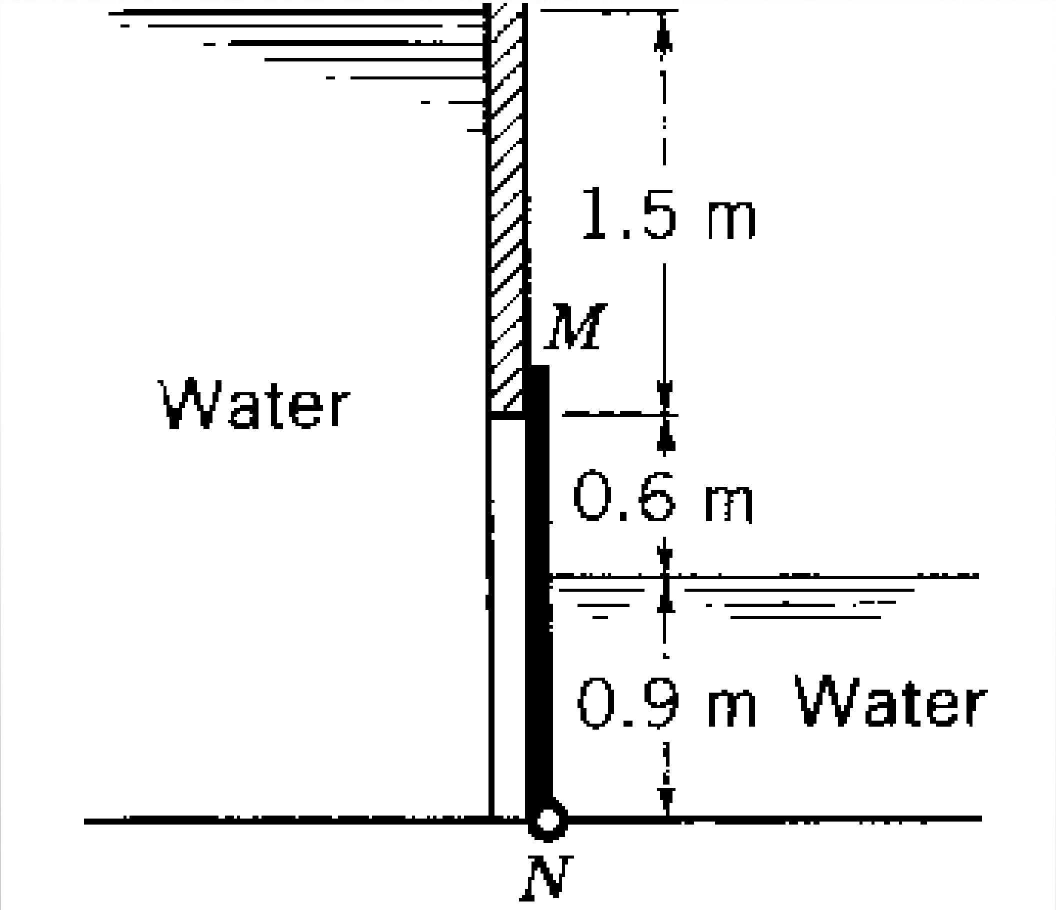
Fδεξ = P.A = 880000 N. Πρέπει να βρεθεί το ύψος z, στο οποίο αντίστοιχεί υδροστατική δύναμη από αριστερά ίση με την τιμή αυτή της Fδεξ. Η δύναμη αυτή είναι F= γ z_k A, Ομως, επειδή η ελεύθερη επιφάνεια του νερού είναι ήδη υπό ατμοσφαιρική πίεση, ενώ αντίθετα η πίεση του αερίου είναι η απόλυτη πίεση, πρέπει να την προσθέσουμε στην υδροστατική δύναμη, από αριστερά. Δηλαδή, να προσθέσουμε ύψος νερού αριστερά, που να αντιστοιχεί σε 1 bar. Το ύψος αυτό είναι h= P/γ = 100000/9810 = 10.194 m.

Εξισώνοντας την υδροστατική δύναμη F= γ z_k A με την Fδεξ , όπου είναι z_k= 10.194+z -1

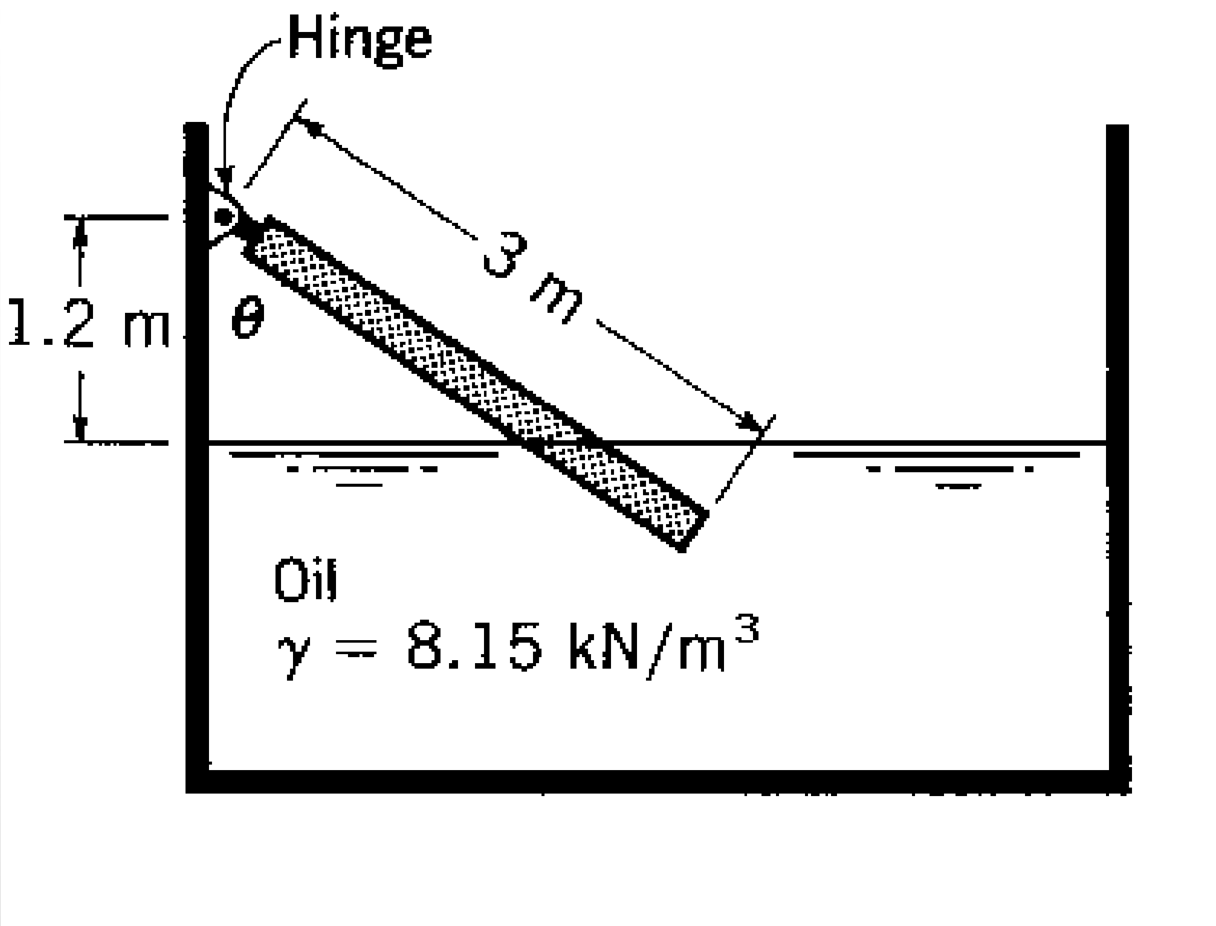
9810 (10.194+z-1) 4 = 880000 z = 13.232 m

ΠΡΌΒΛΗΜΑΤΑ





Ποια είναι η δύναμη που εξασκείται στο Μ?

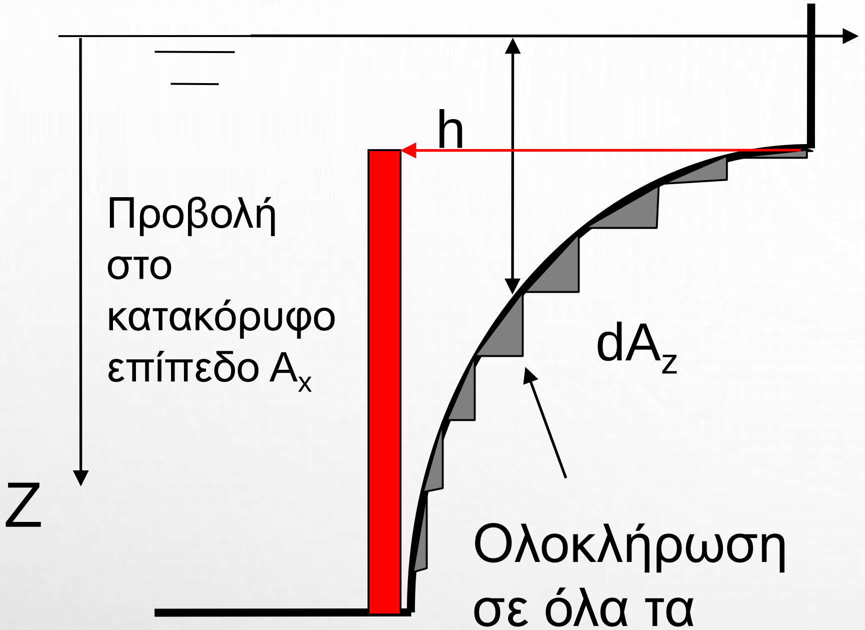


Hinge
3 m
1.2 m
θ
Oil
γ = 8.15 kN/m³

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΕ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

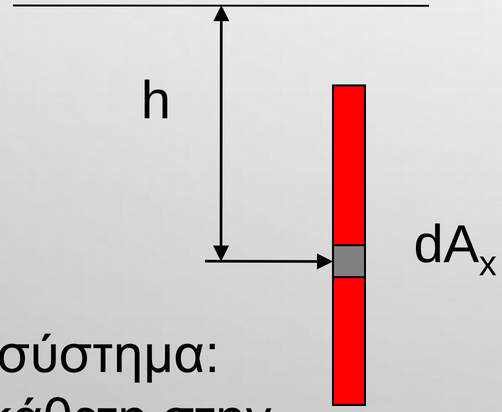
- ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ
- ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ
- ΕΠΙΠΛΕΥΣΗ

ΟΡΙΖΌΝΤΙΑ ΣΥΝΙΣΤΏΣΑ



$$F_x = \int dF_x = \int \gamma h \, dA_x = \gamma \int h \, dA_x$$

Η εύρεση της F_x έγκειται στον προσδιορισμό της δύναμης που δρα σε βυθισμένη επιφάνεια προσανατολισμένη κατακόρυφα. A_x είναι η προβολή της επιφάνειας στο επίπεδο yz. Αντίστοιχα ισχύουν για την δύναμη στην διεύθυνση y, για την δύναμη F_y.



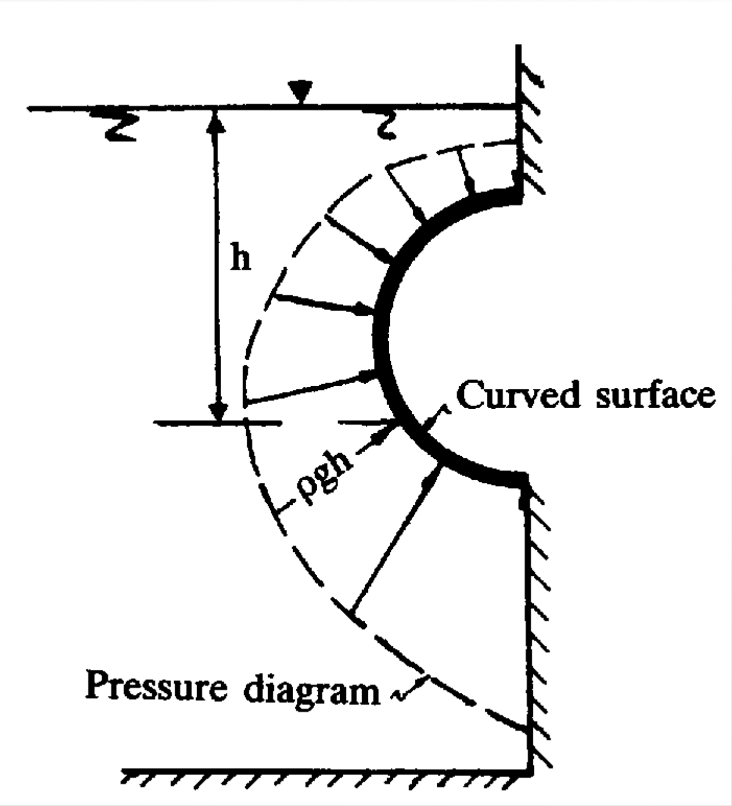
$$F_x = \int dF_x = \int \gamma h \, dA_x = \gamma \int h \, dA_x$$

Ισοδύναμο σύστημα: Επιφάνεια κάθετη στην ελεύθερη επιφάνεια

ΔΎΝΑΜΗ ΣΕ ΒΥΘΙΣΜΕΝΗ ΚΑΜΠΎΛΗ (3D) ΕΠΙΦΆΝΕΙΑ

$$dF_x = p \cdot dA_x = \rho \cdot g \cdot y \cdot \sin\theta \cdot dA \Rightarrow \boxed{F_x = \rho \cdot g \cdot y_k \cdot A_x}$$

$$dF_y = p \cdot dA_x = \rho \cdot g \cdot y \cdot \cos\theta \cdot dA = \rho \cdot g \cdot dU \Rightarrow \boxed{F_x = \rho \cdot g \cdot U}$$

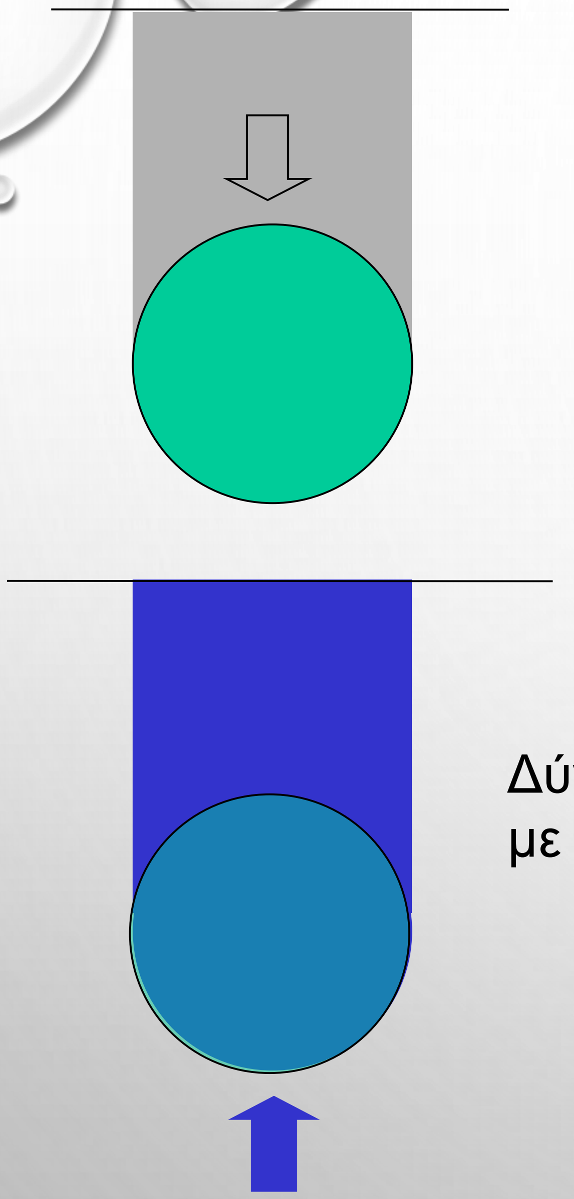


Όπου U ο όγκος του νερού που εκτείνεται από την καμπύλη επιφάνεια, μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια.

Αρα, η δύναμη που δρά σε καμπύλη επιφάνεια, υπολογίζεται σαν δύο συνιστώσες:

- Την οριζόντια, που είναι η δύναμη που αντιστοιχεί σε αυτήν που δρά στην κατακόρυφη προβολή της καμπύλης επιφάνειας (ή τις οριζόντιες) και
- Την κατακόρυφη, που είναι ίση με το βάρος του νερού που βρίσκεται πάνω από την καμπύλη επιφάνεια

ΑΝΩΣΗ



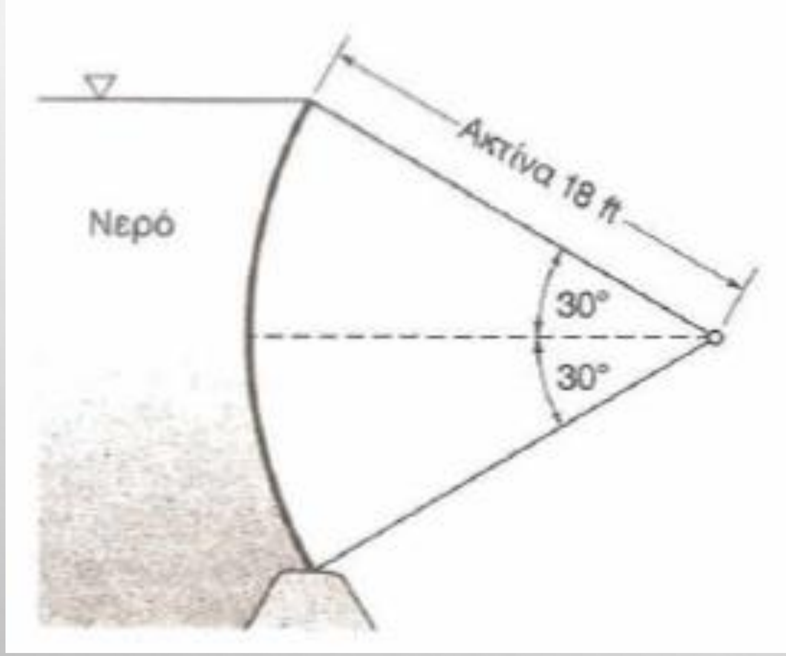
Δύναμη με φορά προς τα κάτω $F_D = \rho g V_1$
Μόνο ο γκρι όγκος

Ανωση = $F_U - F_D = \rho g (V_2 - V_1) = \rho g V$
V: ο όγκος του σώματος

Δύναμη με φορά προς τα κάτω: $F_U = \rho g V_2$
με όλο τον όγκο

ΑΣΚΗΣΗ

Στο σχήμα φαίνεται δεξαμενή νερού που καταλήγει σε θυρόφραγμα που είναι κυκλικό τόξο γωνίας 60° με ακτίνα 18 m ενώ το πλάτος του είναι 10 m, κατά τη διάσταση που δεν φαίνεται. Να υπολογιστεί η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης με την οποία το νερό δρά στο θυρόφραγμα.



Η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που δρά στο θυρόφραγμα είναι ίση με την δύναμη στην επίπεδη επιφάνεια που είναι η προβολή της αρχικής στο κατακόρυφο επίπεδο. Επομένως είναι ίση με F= γ z_k A, όπου z_k το βάθος του κέντρου βάρους της επιφάνειας. Η επιφάνεια A, δηλαδή η προβολή της αρχικής, είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ύψος ίσο με την ακτίνα του κύκλου, δηλαδή 18 m, και πλάτος 10 m. Το ύψος της προβολής είναι ίσο με την ακτίνα, επειδή η γωνία του τόξου είναι 60°, και επομένως πρόκειται για ισόπλευρο τρίγωνο.

9810 * 9 * (18*10) = 15892200 N = 15.89 MN

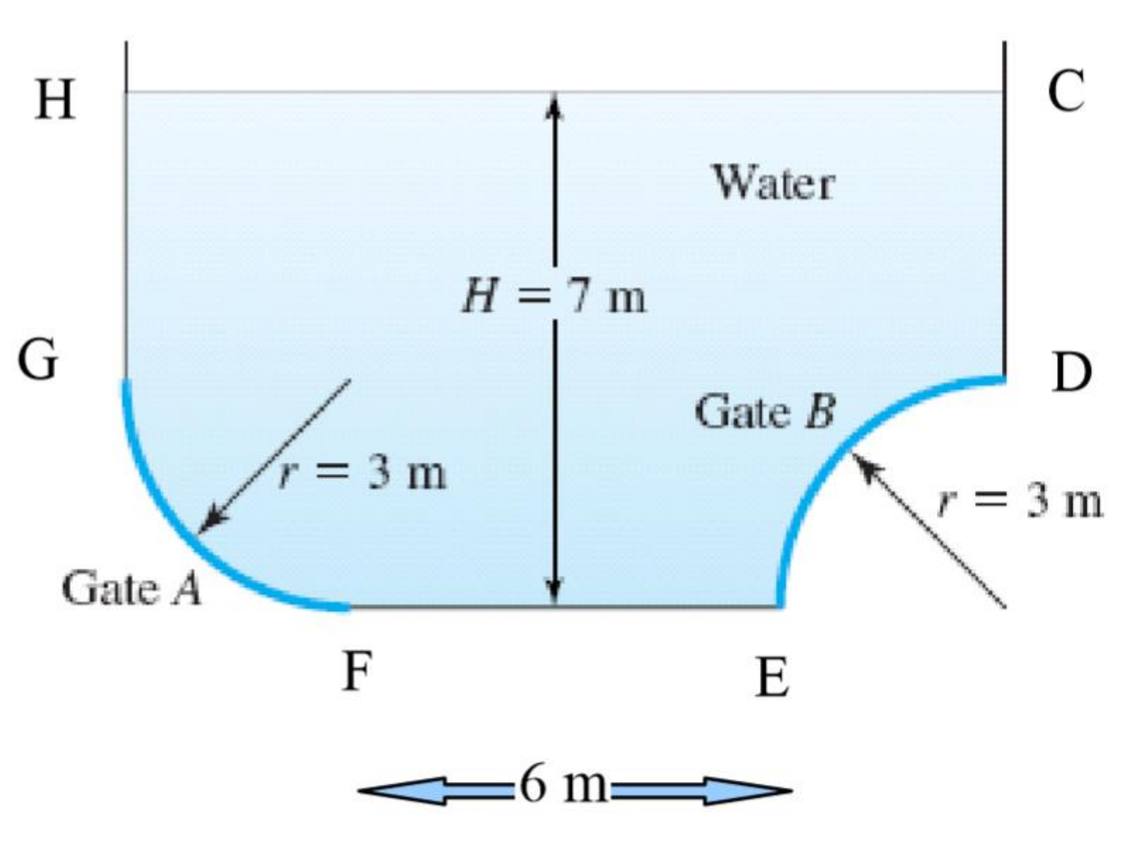
ΑΣΚΗΣΗ

Οι πύλες Α και Β της δεξαμενής της οποίας η τομή φαίνεται στο σχήμα, είναι τεταρτοκύλινδροι ακτίνας 3 m. Η επιφάνεια FE έχει μήκος 6 m.

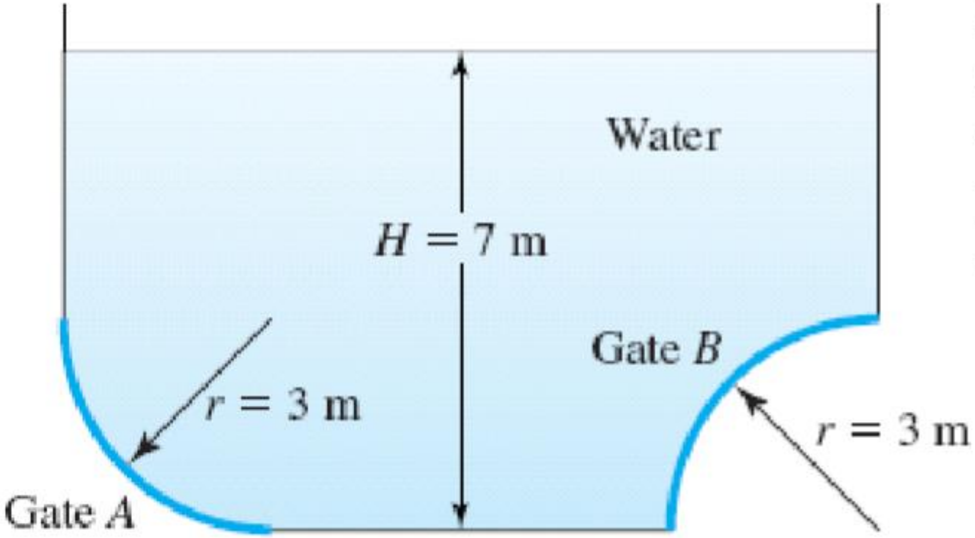
α) Ποιά είναι η δύναμη που δρά στην επιφάνεια FE ανά m πλάτους της δεξαμενής? (412020 N)

β) Ποιά είναι η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που δρά στην επιφάνεια CDE ανά m πλάτους της δεξαμενής? (240345 N)

γ) Για ποιό λόγο η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης που δρά στην επιφάνεια CDE είναι ίση μ'αυτήν της δύναμης που δρά στην επιφάνεια FGH?



ΑΣΚΗΣΗ



3. Οι πύλες Α και Β σε μια δεξαμενή νερού με βάθος 7m έχουν σχήμα ενός τετάρτου του κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο σχήμα της τομής της δεξαμενής. Η διάσταση που δεν φαίνεται είναι 5m. Να βρεθούν οι οριζόντιες και οι κατακόρυφες συνιστώσες των υδροστατικών δυνάμεων που δρούν στις δύο πύλες. (*μονάδες 3.5*)

Θεμα

Οι οριζόντιες συνιστώσες στις δύο πύλες είναι ίσες, αφού έχουν τις ίδιες ακριβώς προβολές στο κατακόρυφο επίπεδο. Και είναι:

$$F_{h_A} = F_{h_B} = \gamma \cdot z_k \cdot A = 9810 \cdot 5{,}5 \cdot 15 = 809325\ N = 809\ kN$$

(Η προβολή είναι ένα ορθογώνιο με ύψος 3m και πλάτος 5m. Άρα $A = 5 \cdot 3\ m^2$

Το κέντρο βάρους αυτού του ορθογωνίου βρίσκεται σε βάθος $7 - \frac{3}{2} = 5{,}5\ m$)

Οι κατακόρυφες συνιστώσες είναι $F_v = \gamma \cdot \forall$, όπου $\forall$ ο υπερκείμενος όγκος.

Για την πύλη Α το υπερκείμενο εμβαδό είναι: $3 \cdot 4 + \frac{\pi r^2}{4} = 19{,}07\ m^2$

ενώ για την πύλη Β: $3 \cdot 7 - \frac{\pi r^2}{4} = 13{,}93\ m^2$

και επομένως οι αντίστοιχοι όγκοι: $\forall_A = 19{,}07 \cdot 5\ m^3$

και $\forall_B = 13{,}93 \cdot 5\ m^3$, και άρα οι κατακόρυφες συνιστώσες:

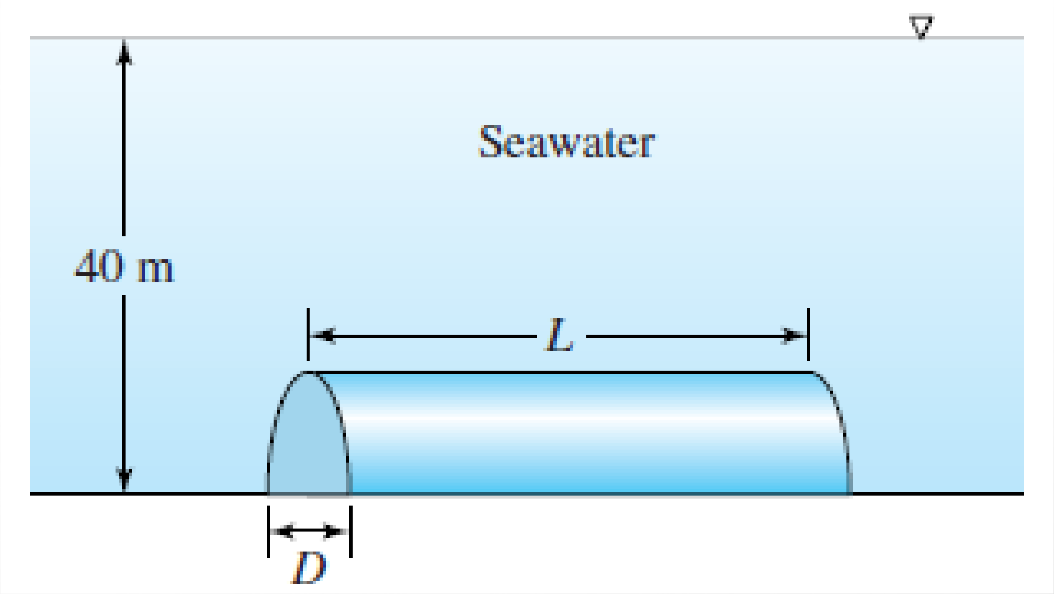
$$F_{V_A} = 9810 \cdot 19{,}07 \cdot 5 = 935383\ N = 935\ kN$$

$$F_{V_B} = 9810 \cdot 13{,}93 \cdot 5 = 683336\ N = 683\ kN$$

2/2

ΑΣΚΗΣΗ

Η κατασκευή του σχήματος είναι ημικυλινδρική, με διάμετρο D=24m και μήκος L ίσο με τον αριθμό Μητρώου σας στο ΤΕΙ σε cm. Να βρεθούν τα μέτρα της οριζόντιας και της κατακόρυφης συνιστώσας της δύναμης που ασκεί το θαλασσινό νερό, μόνο στην ημικυλινδρική επιφάνεια



Η οριζόντια συνιστώσα στην ημικυλινδρική επιφάνεια για κάθε μία από τις δύο πλευρές είναι ίση μ'αυτήν που δρά στην κατακόρυφη προβολή της, που είναι παραλληλόγραμμο διαστάσεων LX12m, σε βάθος από 28 μέχρι 40m. Για φοιτητή με ΑΜ=4000, L=40m, και η οριζόντια αυτή συνιστώσα είναι:

$$F = \gamma z_k A = 9810 \cdot \frac{28+40}{2} \cdot 40\ 12 = 160099200N = 160M\ N$$

Η κατακόρυφη συνιστώσα είναι ίση με το βάρος του όγκου νερού που υπάρχει επάνω από την ημικυλινδρική επιφάνεια. Ο όγκος αυτός είναι όγκος παραλληλεπιπέδου, μείον αυτόν του ημικυλίνδρου. Δηλαδή:

$$V = 40 \cdot 24\ 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3.14\ 12^2\ 40 = 29352m^2$$

και επομένως η κατακόρυφη συνιστώσα: $F = \gamma V = 2.879 \cdot 10^8 N$

Σε κάθε ημικυκλική επιφάνεια, η οριζόντια δύναμη είναι $F = \gamma z_k A$.

Το εμβαδό της ημικυκλικής επιφάνειας είναι: $A = \frac{\pi \cdot 12^2}{2} = 226.2m^2$

Το βάθος του κέντρου βάρους του ημικυκλίου, σύμφωνα με το μήκος 4r/(3π) που δίνεται, θα είναι $z_k = 40 - \frac{4 \cdot 12}{3\pi} = 34.907m$

και επομένως η δύναμη: $F = \gamma z_k A = 9810 \cdot 34.9\ 226 = 7.74\ 10^7 N$

2. Το ημισφαιρικό σώμα του σχήματος (r=0.6m) προεξέχει στο εσωτερικό ενός δοχείου. Ζητούνται η οριζόντια και η κατακόρυφη δύναμη που ασκούνται στο ημισφαίριο, αν το δοχείο είναι γεμάτο νερό και η ελεύθερη επιφάνειά του είναι 1.5m πάνω από το σημείο Α.

Η οριζόντια δύναμη, είναι αυτή που δρά στην κατακόρυφη προβολή του σώματος, δηλαδή σε κύκλο με ακτίνα $r=0,6m$, με βάθος κέντρου βάρους του κύκλου $z_k=1,5m$, αφού το Α είναι το κ.β. του κύκλου.

Άρα είναι $F_{οριζ} = \gamma \cdot z_k \cdot A = 9810 \cdot 1,5 \cdot \pi \cdot (0,6)^2 = 16642\ N$

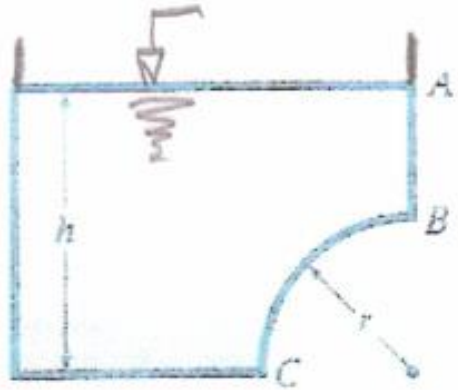
Η κατακόρυφη δύναμη είναι αυτή που δρά στο επάνω μέρος του ημισφαιρίου, και έχει φορά προς τα κάτω, μείον αυτή που δρά στο κάτω μέρος και έχει φορά προς τα επάνω. Και οι δύο έχουν μέτρο ίσο με το βάρος του αντίστοιχου όγκου νερού, ως εξής: $\forall_{EFCD}$ για την πρώτη και $\forall_{EBCD}$ για την δεύτερη. Άρα η δύναμη είναι:

$$F_{κατ} = \gamma \forall_{EBCD} - \gamma \forall_{EFCD} = \gamma(\forall_{EBCD} - \forall_{EFCD}) =$$

$$= \gamma \cdot \forall_{FBC}, \text{ όπου } \forall_{FBC} = \frac{4}{6}\pi r^3 = 0,4524\ m^3$$

(επειδή είναι ο μισός όγκος σφαίρας).

Άρα $F_{κατ} = 9810 \cdot 0,4524 = 4438\ N$ με φορά προς τα επάνω.



1. Η εγκάρσια τομή του δοχείου του σχήματος περιλαμβάνει την κυλινδρική επιφάνεια BC με r=2m και h=3.5m. Στο σημείο A βρίσκεται η ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Να υπολογιστούν η οριζόντια και η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται σε κάθε μέτρο πλάτους της πλευράς ABC του δοχείου.

Για την οριζόντια συνιστώσα είναι: $F_h = \gamma z_k A$.

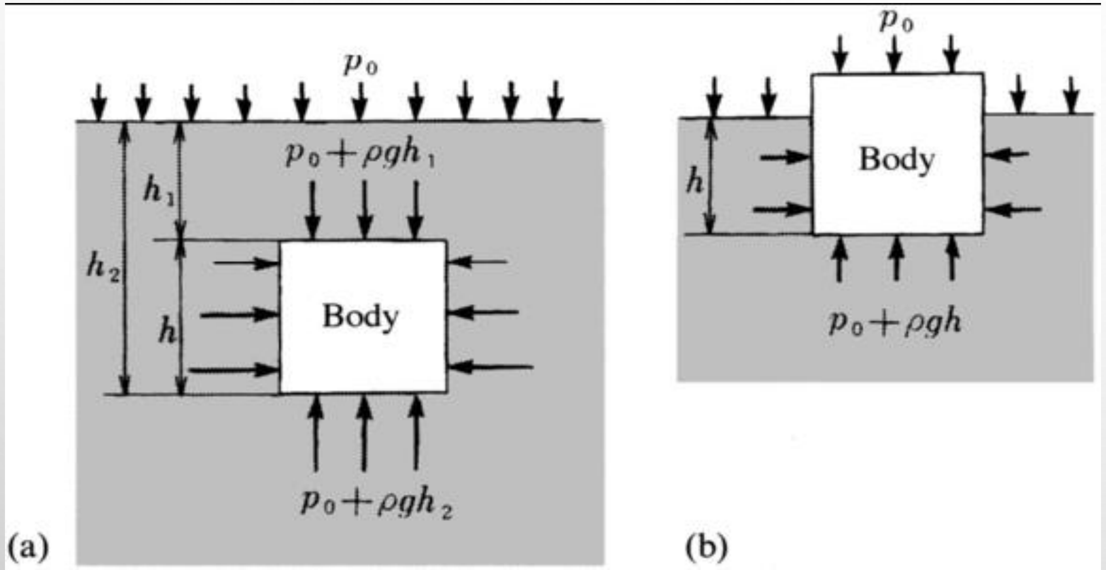
Η επιφάνεια A είναι η κατακόρυφη προβολή της ABC, δηλαδή ένα ορθογώνιο με ύψος $h=3,5m$ και πλάτος 1m. Δηλαδή $A = 3,5 \cdot 1 = 3,5 m^2$.

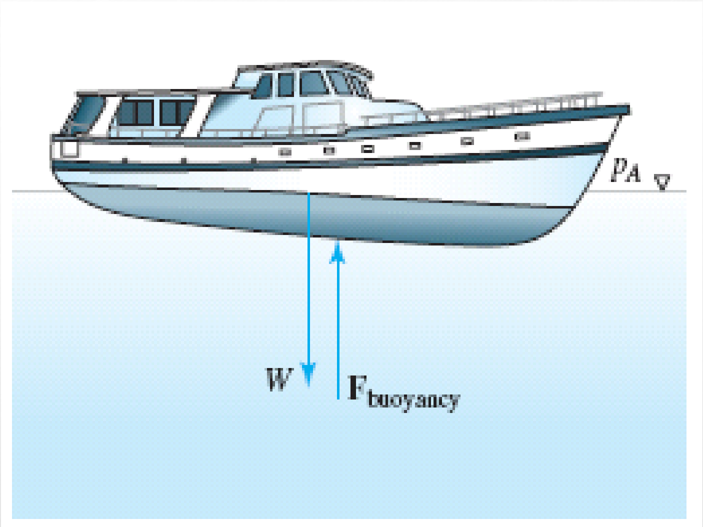
Το βάθος του κέντρου βάρους της A, είναι $h/2 = 1,75m$, αφού πρόκειται για παραλληλόγραμμο. Άρα $F_h = 9810 \cdot 1,75 \cdot 3,5 = 60090 N$

Για την κατακόρυφη συνιστώσα, ισχύει: $F_v = \gamma \forall$, όπου $\forall$, ο όγκος του νερού που βρίσκεται πάνω από την BC, δηλαδή ένα παραλληλεπίπεδο μείον έναν τεταρτοκύλινδρο με πλάτος 1m και τα δύο. Άρα: $\forall = hr \cdot 1 - \frac{\pi r^2}{4} \cdot 1$, και: $F_v = \gamma\left(hr - \frac{\pi r^2}{4}\right) \Rightarrow$

$$F_v = 37850 N.$$

ΑΝΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΊΠΛΕΥΣΗ





Το σκάφος βυθίζεται στο νερό τόσο, ώστε η άνωση να είναι ίση με το βάρος του