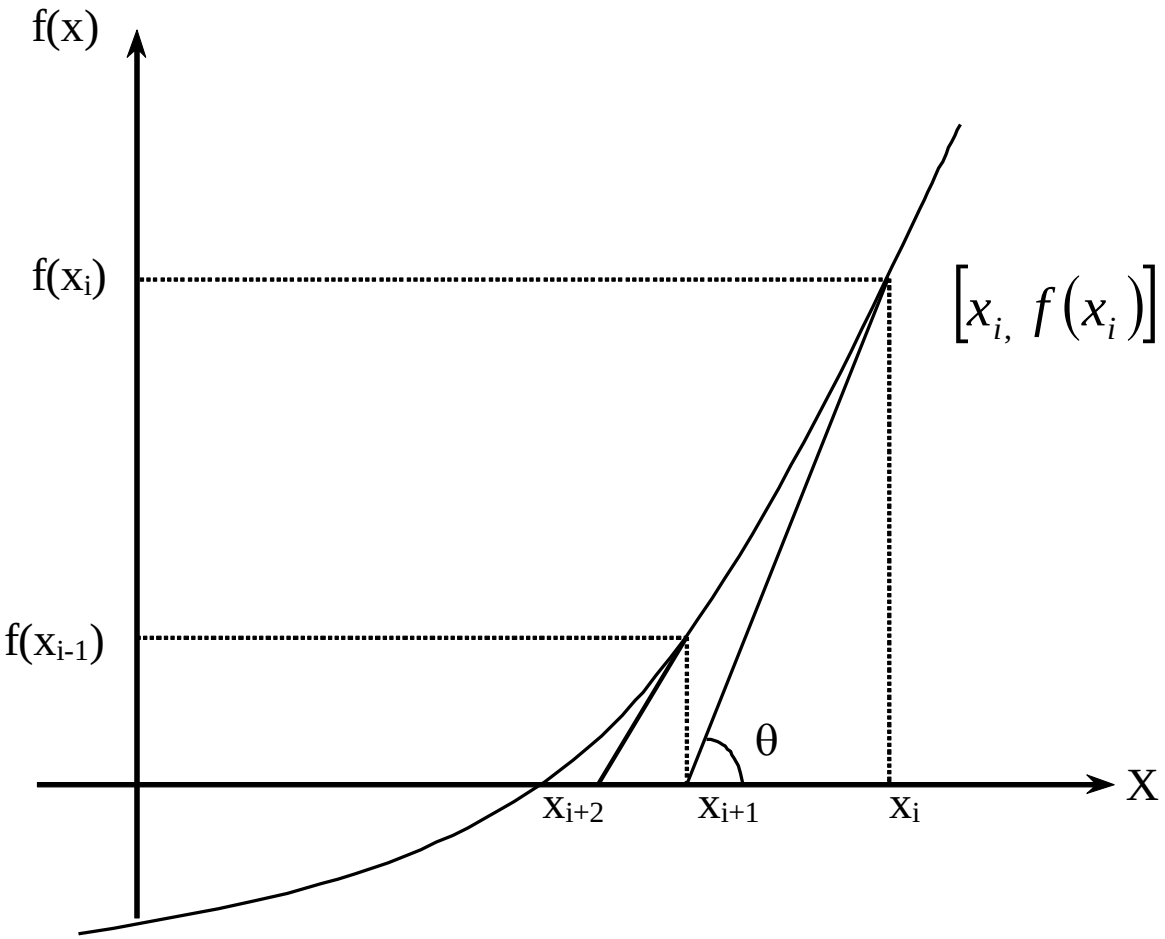
- ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ
- ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON – RAPHSON
- ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ

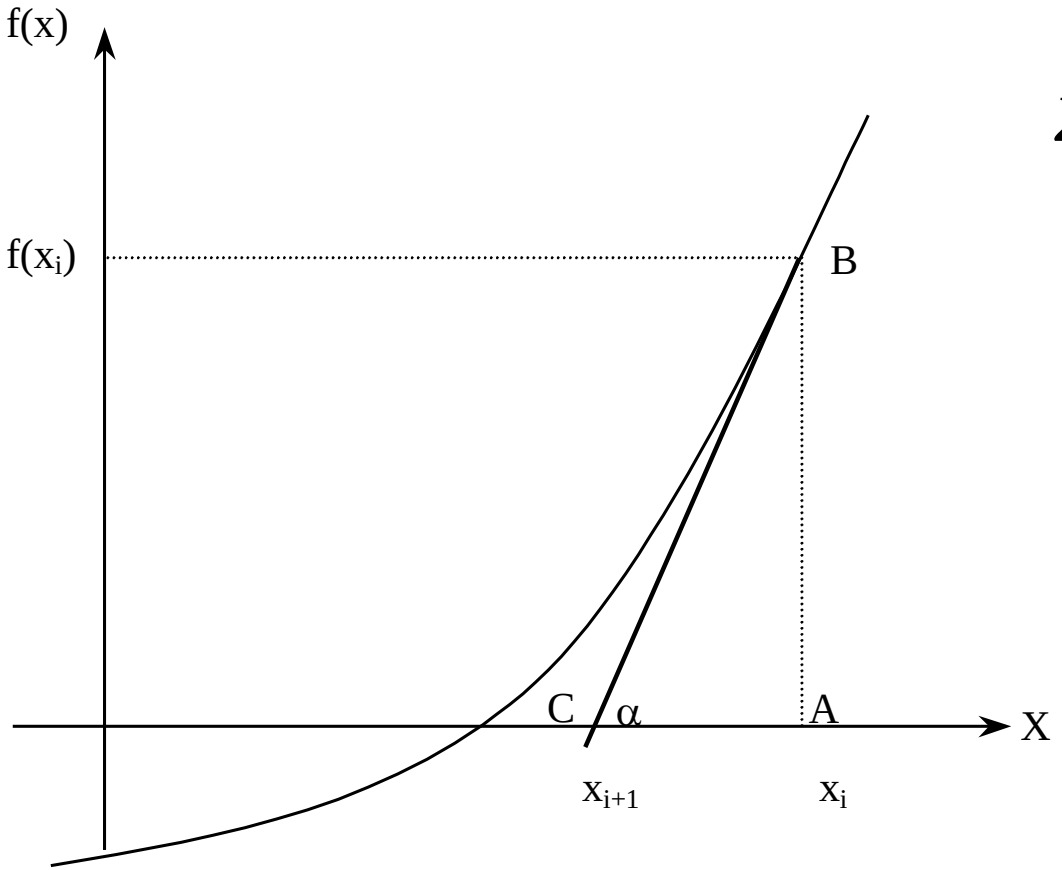
Μέθοδος Newton-Raphson



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Σχηματική αναπαράσταση της προσέγγισης της ρίζας

Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου Newton-Raphson



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{AB}{AC}$$

Αφαιρείται από το x_i το AC,
οπότε το x_{i+1} είναι πιο κοντά στη ρίζα:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{AB}{\frac{AB}{AC}} = x_i - AC$$

Μέθοδος Newton-Raphson - σύγκλιση

Θεώρημα

Έστω ότι οι f, f ′, f ″ *είναι συνεχείς συναρτήσεις του* x *σε ένα διάστημα* I *που περιέχει τη ρίζα* $x = \xi$ *της* $f(x) = 0$ *και ότι* $f'(x) \neq 0$. *Τότε υπάρχει ένα διάστημα* $I_3 \subset I$ *και τέτοιο που* $\xi \in I_3$, *έτσι που αν* $x_0 \in I_3$, *τότε η ακολουθία που ορίζεται από την (2.12) συγκλίνει στο* ξ.

Διαστήματα:

I: με συνεχείς f, f’, f’’ και ξ

I_1: με ξ και f’ διάφορο του 0

I_2: με ξ και $|g'(x)|<1$

I_3: τομή των I_2 και I_3

τότε, για x_0 που να ανήκει στο I_3

η ακολουθία συγκλίνει στη ρίζα ξ

Αριθμητική εφαρμογή : Να υπολογιστούν οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 2x^2 - 7x + 3 = 0$ με τη μέθοδο Newton - Raphson :

$$f'(x) = 4x - 7, \qquad g(x) = x - \frac{2x^2 - 7x + 3}{4x - 7}$$

Παρακάτω δίνονται αποτελέσματα για διάφορες αρχικές τιμές x_0. Παρατηρούμε ότι η μέθοδος Newton - Raphson συγκλίνει σε διαφορετική ρίζα για τις διάφορες αρχικές τιμές.

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ x = 0.1

I=0	x=	.4515151
I=1	x=	.4990948
I=2	x=	.4999996
I=3	x=	.5

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ x = 1

I=0	x=	.3333333
I=1	x=	.490196
I=2	x=	.4999619
I=3	x=	.5
I=4	x=	.5

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ x = 1.7

I=0	x=	-13.90002
I=1	x=	-6.124928
I=2	x=	-2.286672
I=3	x=	-.461874
I=4	x=	.2908557
I=5	x=	.4850113
		.4999112
		.5
		.5

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ x = 1.8

I=0	x=	17.40001
I=1	x=	9.624928
I=2	x=	5.786671
I=3	x=	3.961874
I=4	x=	3.209144
I=5	x=	3.014988
I=6	x=	3.000089
I=7	x=	3
I=8	x=	3

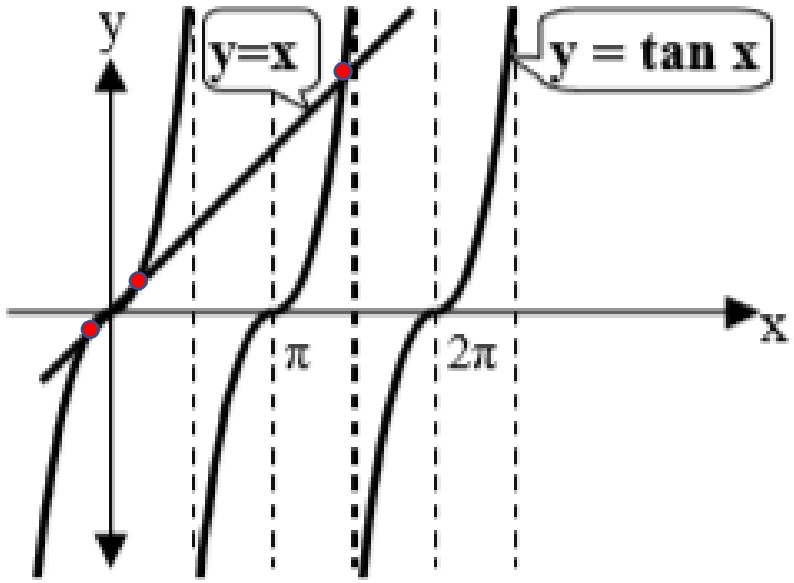
ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ x = 3.2

I=0	x=	3.013793
I=1	x=	3.000075
I=2	x=	3
I=3	x=	3

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ x = 5

I=0	x=	3.615385
I=1	x=	3.101507
I=2	x=	3.003812
I=3	x=	3.000006
I=4	x=	3

Αν η αρχική τιμή μακρυά από ρίζα, μπορεί να παρατηρηθεί απόκλιση:

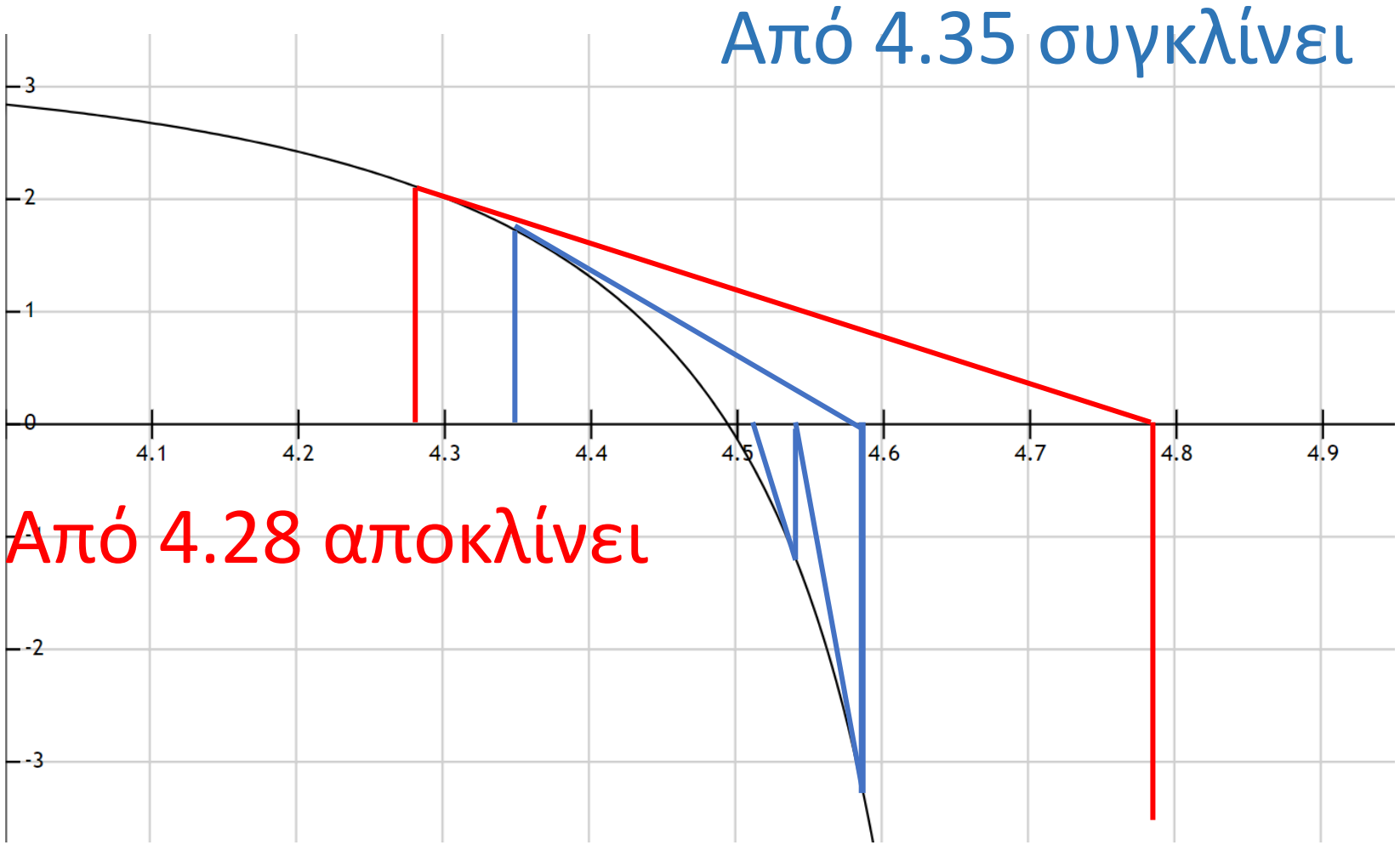


Πολλές φορές, πρέπει να είναι πολύ κοντά στη ρίζα, όπως για παράδειγμα στην συνάρτηση f(x)=x-tanx

$$f(x) = x - \tan x,$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x$$

$$g(x) = x - \frac{x - \tan x}{\tan^2 x}.$$



ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ x = 4.35

I=0	x=	4.596144
I=1	x=	4.542043
I=2	x=	4.504422
I=3	x=	4.493979
I=4	x=	4.493411
I=5	x=	4.49341

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ x = 4.28

I=0	x=	4.73011
I=1	x=	4.749318
I=2	x=	4.792747
I=3	x=	4.904361
I=4	x=	5.284002
I=5	x=	8.113594
I=6	x=	8.95159
I=7	x=	45.05458
I=8	x=	57.86177
I=9	x=	61.61732
. . .	. .	. . . .
I=21	x=	7.523681E+09

Ταχύτητα σύγκλισης Newton - Raphson

Αποδεικνύεται ότι είναι «τετραγωνική», σε αντίθεση με αυτήν της μεθόδου διαδοχικών επαναλήψεων, της οποίας είναι «γραμμική».

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}\right) = \frac{g''(\xi)}{2}$$

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}\right) = \frac{g'(\xi)}{2}$$

Παράδειγμα σύγκλισης των δύο μεθόδων: Να βρεθούν οι ρίζες της $f(x) = x - sinx - 0.25$ στο διάστημα [π/4,π/2].

Για τη μέθοδο των απλών συναρτησιακών επαναλήψεων,

$g(x) = \sin x + 0.25$ και $g'(x) = \cos x$.

Επειδή $|g'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ στο διάστημα $I = [\pi/4, \pi/2]$, η μέθοδος θα συγκλίνει, αν $x_0 \in I$.

μέθοδος συναρτησιακών επαναλήψεων

$g(x) = sinx + 0.25 \qquad x_{i+1} = sin(x_i) + 0.25$

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ $x_0 = 1.4$ **ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ $x_0 = 1.2$**

I=0	x=	1.23545	I=0	x=	1.182039
I=1	x=	1.194296	I=1	x=	1.175381
I=2	x=	1.179957	I=2	x=	1.172837
I=3	x=	1.17459	I=3	x=	1.171854
I=4	x=	1.172532	I=4	x=	1.171472
I=5	x=	1.171735	I=5	x=	1.171324
I=6	x=	1.1714261	I=6	x=	1.171266
I=7	x=	1.171306	I=7	x=	1.171244
I=8	x=	1.171259	I=8	x=	1.171235
I=9	x=	1.171241			
I=10	x=	1.171234			

μέθοδος Newton – Raphson

$f(x) = x - sinx - 0.25 \qquad f'(x) = 1 - cosx$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - \sin(x_i) - 0.25}{1 - cos(x_i)}$$

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ $x_0 = 1.4$ **ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ $x_0 = 1.2$**

I=0	x=	1.201755	I=0	x=	1.171832
I=1	x=	1.171907	I=1	x=	1.17123
I=2	x=	1.17123	I=2	x=	1.17123
I=3	x=	1.17123			

Επομένως, **όταν** η μέθοδος Newton – Raphson συγκλίνει, συγκλίνει γενικά **γρηγορότερα** από την μέθοδο συναρτησιακών επαναλήψεων

Αλγόριθμος

Αναλυτικός προσδιορισμός της $f'(x)$

Χρήση αρχικής τιμής της ρίζας, x_i, για την εκτίμηση της καινούργιας τιμής x_{i+1}, από

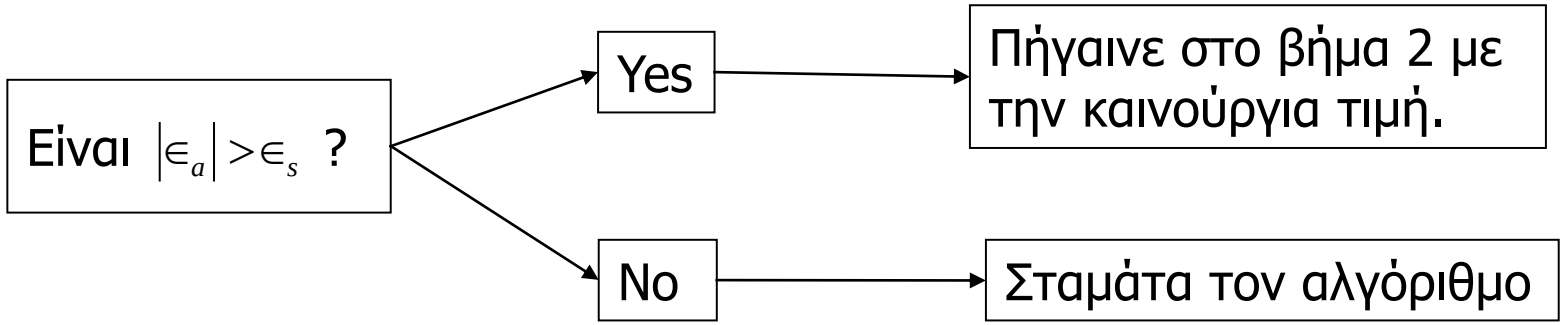
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Υπολογισμός σχετικού προσεγγιστικού σφάλματος $|\in_a|$

$$|\in_a| = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| \times 100$$

Συνέχεια αλγορίθμου

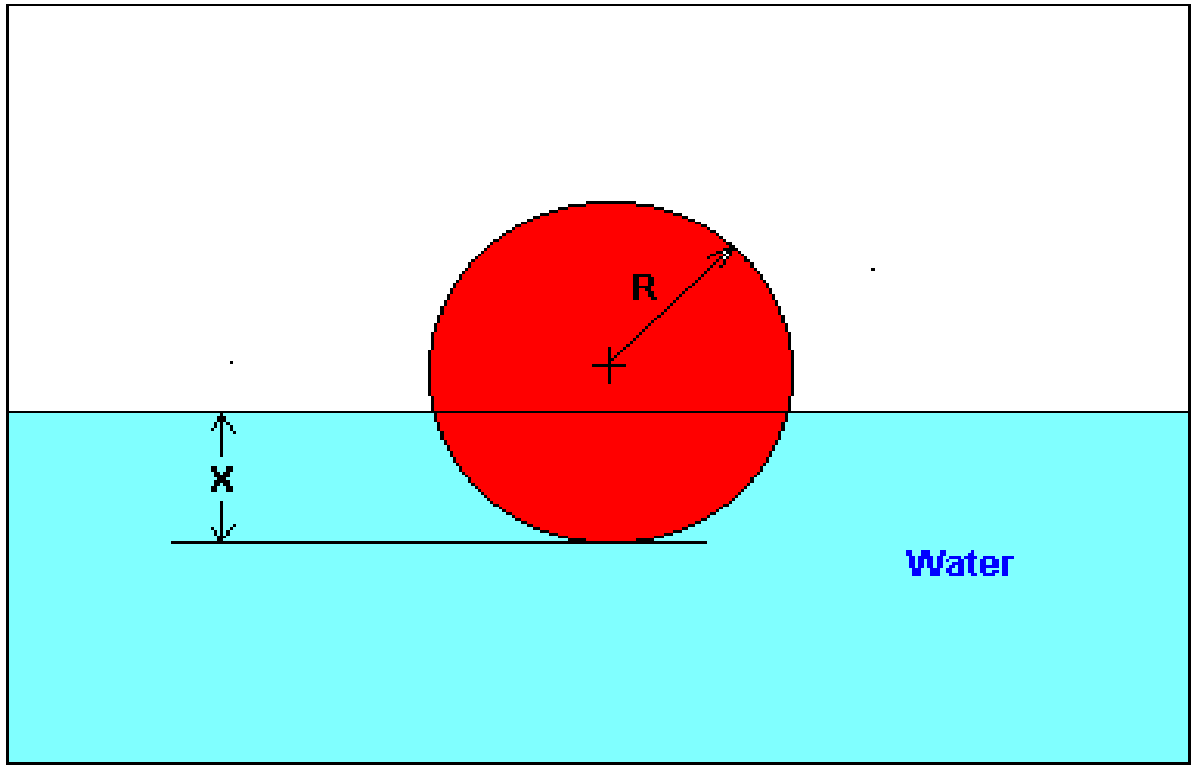
Σύγκριση του σχετικού προσεγγιστικού σφάλματος με την προκαθορισμένη του τιμή: $\in_s$



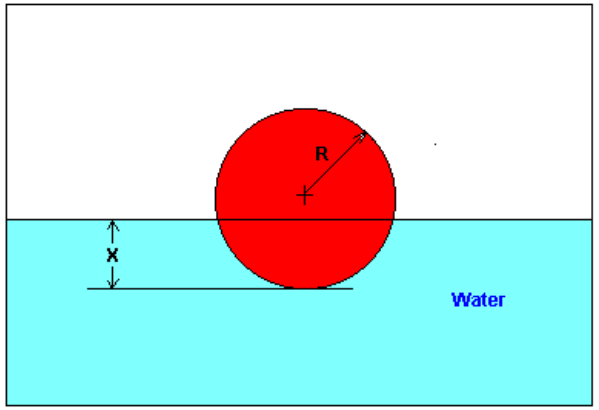
Επίσης, έλεγξε εάν ο αριθμός των προσεγγίσεων έχει υπερβεί τον μέγιστο προκαθορισμένο (πχ 1000000). Σε αυτή την περίπτωση, σταμάτα τον αλγόριθμο και ειδοποίησε τον χρήστη.

Παράδειγμα

Η επιπλέουσα σφαίρα του σχήματος έχει ειδικό βάρος 0.6 και ακτίνα 5.5 cm. Ποιο το βάθος x της σφαίρας όταν επιλέει?



Παράδειγμα - συνέχεια

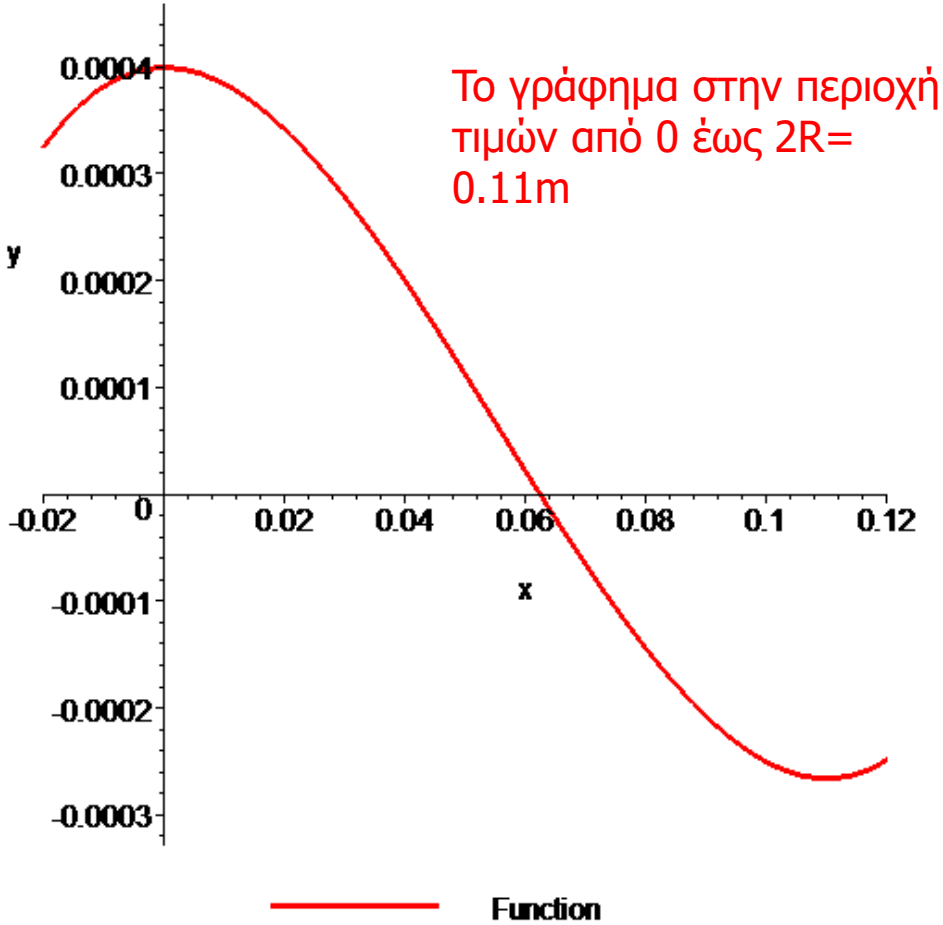


βάθος x σε μέτρα:

$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993\times10^{-4}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0.33x$$

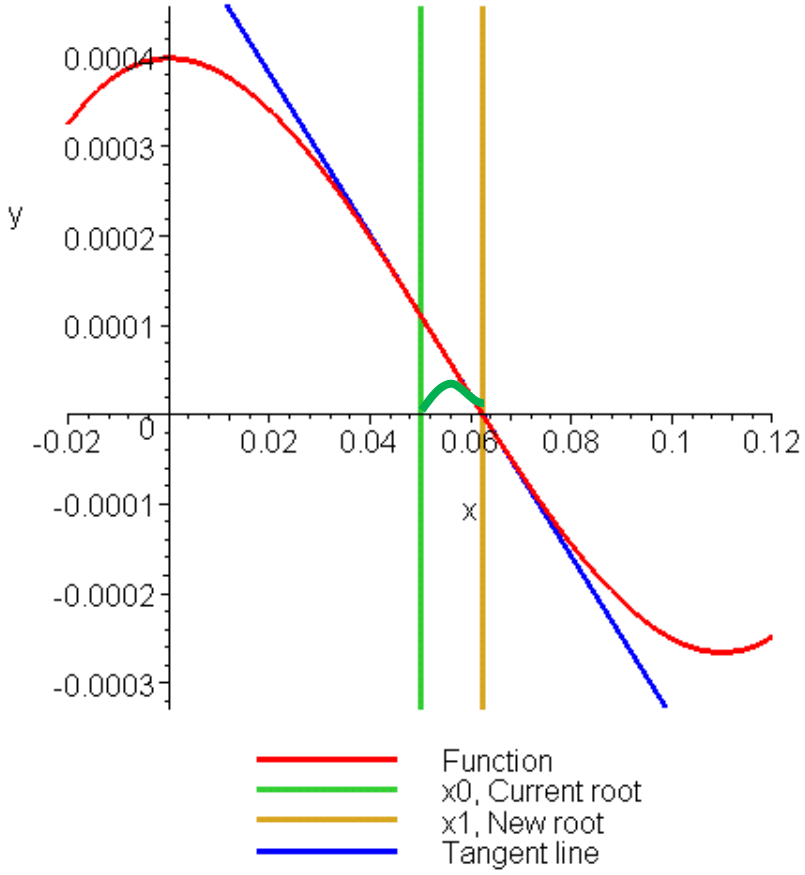
Χρήση της μεθόδου για να προσεγγιστεί η ρίζα (3 προσεγγίσεις) καθώς και το σχετικό προσεγγιστικό σφάλμα για κάθε προσέγγιση, και ο αριθμός των σωστών ψηφίων.



Το γράφημα στην περιοχή τιμών από 0 έως 2R= 0.11m

Σαν αρχική τιμή, με βάση το πρόβλημα, πρέπει να τεθεί κάποια τιμή αναμεσα στο 0 και την διάμετρο (0.11 m). Έδώ θα τεθεί η τιμή $x_0 = 0.05\text{m}$

Παράδειγμα - συνέχεια



<u>Προσέγγιση 1</u>

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= 0.05 - \frac{(0.05)^3 - 0.165(0.05)^2 + 3.993\times10^{-4}}{3(0.05)^2 - 0.33(0.05)}$$

$$= 0.05 - \frac{1.118\times10^{-4}}{-9\times10^{-3}}$$

$$= 0.05 - (-0.01242)$$

$$= 0.06242$$

Το σχετικό προσεγγιστικό σφάλμα:

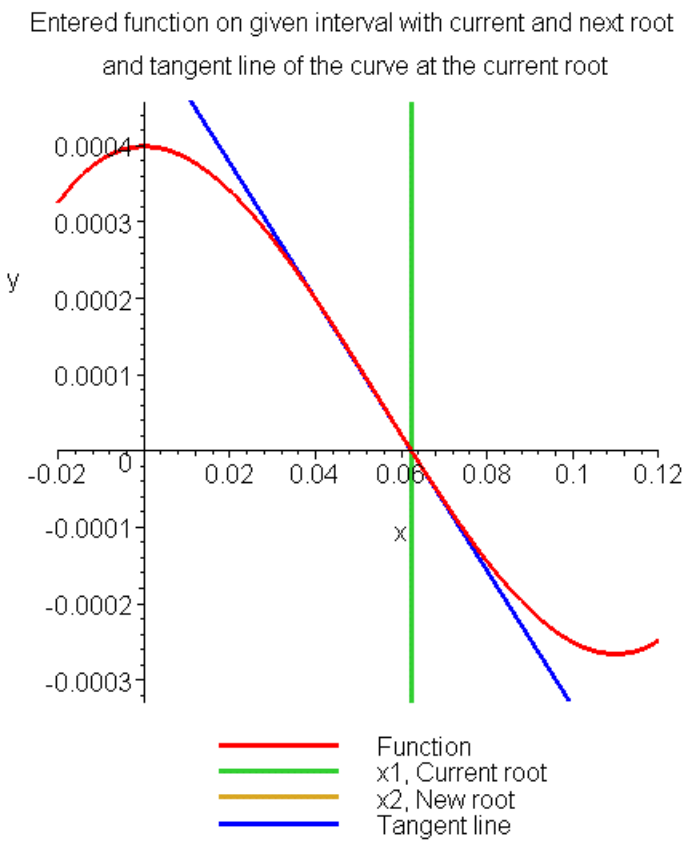
$$|\in_a| = \left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{0.06242 - 0.05}{0.06242}\right| \times 100$$

$$= 19.90\%$$

Ο αριθμός των σωστών σημαντικών ψηφίων είναι 0, καθώς το σχετικό προσεγγιστικό σφάλμα πρέπει να είναι μικρότερο από 5% για τουλάχιστον ένα σημαντικό ψηφίο σωστό (για βεβαιότητα ενός τουλάχιστον σωστού ψηφίου).

Παράδειγμα - συνέχεια



<u>Προσέγγιση 2</u>

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= 0.06242 - \frac{(0.06242)^3 - 0.165(0.06242)^2 + 3.993\times10^{-4}}{3(0.06242)^2 - 0.33(0.06242)}$$

$$= 0.06242 - \frac{-3.97781\times10^{-7}}{-8.90973\times10^{-3}}$$

$$= 0.06242 - \left(4.4646\times10^{-5}\right)$$

$$= 0.06238$$

Το σχετικό προσεγγιστικό σφάλμα:

$$|\in_a| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{0.06238 - 0.06242}{0.06238}\right| \times 100$$

$$= 0.0716\%$$

Μετά την προσέγγιση 2, ξέρουμε ότι έχουμε τουλάχιστον 1 σωστό ψηφίο, όπως θα δούμε στην μεθεπόμενη διαφάνεια.

Παράδειγμα - συνέχεια

<u>Προσέγγιση 3</u>

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$= 0.06238 - \frac{(0.06238)^3 - 0.165(0.06238)^2 + 3.993\times10^{-4}}{3(0.06238)^2 - 0.33(0.06238)}$$

$$= 0.06238 - \frac{4.44\times10^{-11}}{-8.91171\times10^{-3}}$$

$$= 0.06238 - \left(-4.9822\times10^{-9}\right)$$

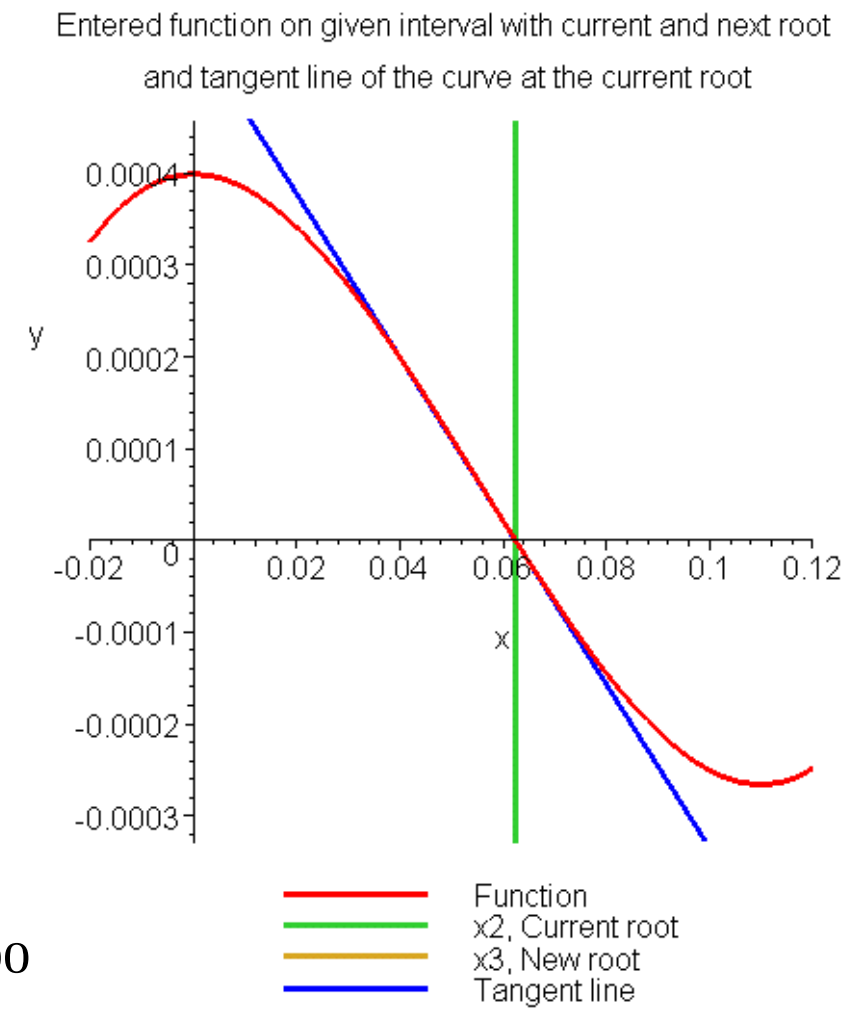
$$= 0.06238$$

Το σχετικό προσεγγιστικό σφάλμα:

$$|\in_a| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{0.06238 - 0.06238}{0.06238}\right| \times 100$$

$$= 0\%$$



Ο ελάχιστος αριθμός των σωστών ψηφίων είναι 4, καθώς 4 σημαντικά ψηφία έχουν χρησιμοποιηθεί στους υπολογισμούς.

Παράδειγμα – συνέχεια: αριθμός σωστών ψηφίων

Για τον προσδιορισμό των σωστών ψηφίων:

- Προσδιορίζεται m = ο μεγαλύτερος εκθέτης του 10 στον αριθμό
- Προσδιορίζεται ο εκθέτης m-n+1 από το σφάλμα, έτσι ώστε: Σφάλμα < 0.5 10^{m-n+1}
- Προσδιορίζεται ο αριθμός των ελάχιστων σωστών ψηφίων n

xi	σφάλμα	μικρότερο από	m-n+1	m	n = σωστά ψηφία
0.05					(τουλάχιστον)
0.06242	0.19900	0.5*10^(0)	0	-2	-1
0.06238	-0.00072	0.5*10^(-2)	-3	-2	2
0.06238	0.000000080	0.5*10^(-6)	-7	-2	6

n=-[(m-n+1)-(m+1)]
όπου το m-n+1 είναι ο εκθέτης του 10 για τον οποίο: $|\sigma\varphi| < 0.5\ 10^{m-n+1}$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η ρίζα της εξίσωσης $\ln x + x - 2 = 0$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων και τη μέθοδο Newton - Raphson.

Προσδιορίστε τον τύπο της προσεγγιστικής διαδικασίας που είναι απαραίτητη για την εφαρμογή της μεθόδου Newton – Raphson
Επίσης, εκτιμήστε μια αρχική τιμή, θεωρώντας την εξίσωση με τη μορφή: $\ln x = 2 - x$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η ρίζα της εξίσωσης $\ln x + x - 2 = 0$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων και τη μέθοδο Newton - Raphson.

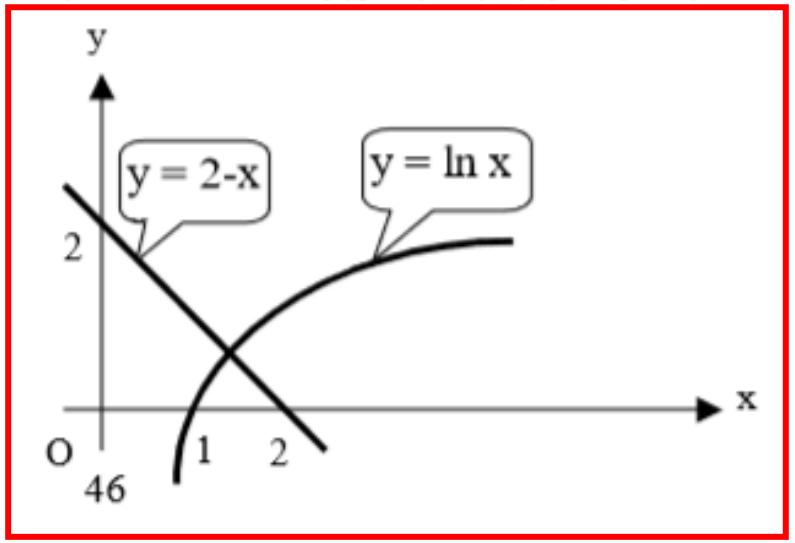
$$x_{i+1} = x_i - \frac{\ln x_i + x_i - 2}{\frac{1}{x_i} + 1}$$

Λύση

Η εξίσωση μπορεί να γραφτεί $\ln x = 2 - x$ και μια πρόχειρη γραφική παράσταση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι σαν αρχική τιμή μπορούμε να πάρουμε $x_0 = 1.5$.

$f(x) = \ln x + x - 2$

Άρα, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$ και



Για $x_0 = 1.5 \rightarrow x_1 = 1.556$

$x_1 = 1.556 \rightarrow x_2 = 1.557$

. . . . . κ.λ.π.

Άσκηση

Να υπολογιστεί η ρίζα της εξίσωσης ln x + x - 2 = 0 με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων και τη μέθοδο Newton - Raphson.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\ln x_i + x_i - 2}{\frac{1}{x_i} + 1}$$

i	xi	σφάλμα	μικρότερο από	m-n+1	m	n = σωστά ψηφία (τουλάχιστον)
0	1.5					
1	1.556720935	0.03644	0.5*10^(-1)	-1	0	2
2	2	0.22164	0.5*10^(0)	0	0	1
3	1.53790188	-0.30047	0.5*10^(0)	0	0	1
4	3	0.48737	0.5*10^(0)	0	0	1
5	1.426040783	-1.10373	0.5*10^(1)	1	0	0
6	4	0.64349	0.5*10^(1)	1	0	0
7	1.290964511	-2.09846	0.5*10^(1)	1	0	0
8	5	0.74181	0.5*10^(1)	1	0	0
9	1.15880174	-3.31480	0.5*10^(1)	1	0	0
10	1.531226068	0.24322	0.5*10^(0)	0	0	1
11	1.557059898	0.0165914	0.5*10^(-1)	-1	0	2
12	1.557145598	0.0000550	0.5*10^(-3)	-3	0	4
13	1.557145599	0.000000001	0.5*10^(8)	-8	0	9

n=-[(m-n+1)-(m+1)]
όπου το m-n+1 είναι ο εκθέτης του 10 για τον οποίο:

$$|\sigma\varphi| < 0.5\ 10^{m-n+1}$$

Εδώ, ο αριθμός των σωστών ψηφίων είναι με βάση τις προσεγγίσεις και όχι την απόλυτα σωστή τιμή …
Επομένως, εμπεριέχει αβεβαιότητα

Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου Newton Raphson

πλεονεκτήματα

- Συγκλίνει γρήγορα (τετραγωνική σύγκλιση), όταν συγκλίνει.
- Απαιτεί μόνο μια αρχική τιμή.

μειονεκτήματα

1. <u>Απόκλιση σε σημεία καμπής</u>
   Αρχική τιμή, ή κάποια προσεγγιστική τιμή κοντά σε σημείο καμπής της συνάρτησης $f(x)$ μπορεί να οδηγήσει σε απόκλιση.

Για παράδειγμα, για εύρεση ρίζας της: $f(x) = (x-1)^3 + 0.512 = 0$

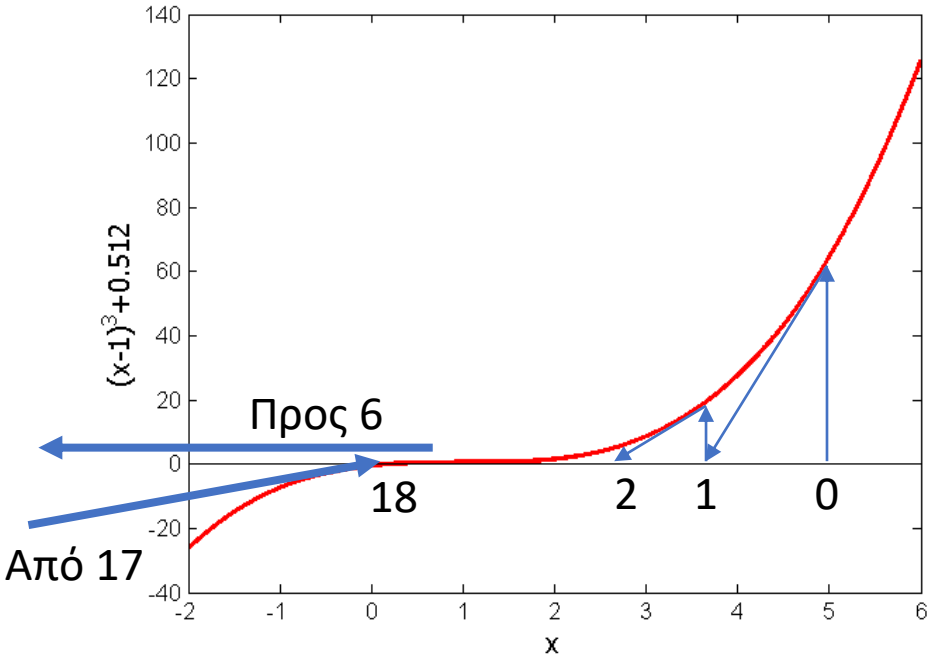
Η Newton-Raphson οδηγεί σε $$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 - 1)^3 + 0.512}{3(x_i - 1)^2}$$

Με αρχική τιμή 5, Η μέθοδος αρχίζει να αποκλίνει στην προσέγγιση 6, επειδή η προηγούμενη προσεγγιστική τιμή 0.92589 είναι κοντά σε σημείο καμπής σε $x = 1$.

Μετά από 12 ακόμα προσεγγίσεις, η μέθοδος συγκλίνει στην ακριβή τιμή $x = 0.2.$

Μειονεκτήματα – σημεία καμπής

Iteration Number	x_i
0	5.0000
1	3.6560
2	2.7465
3	2.1084
4	1.6000
5	0.92589
6	−30.119
7	−19.746
18	0.2000



$$f(x) = (x-1)^3 + 0.512 = 0$$

μειονεκτήματα – διαίρεση με το 0 εάν μηδενίζεται η παράγωγος

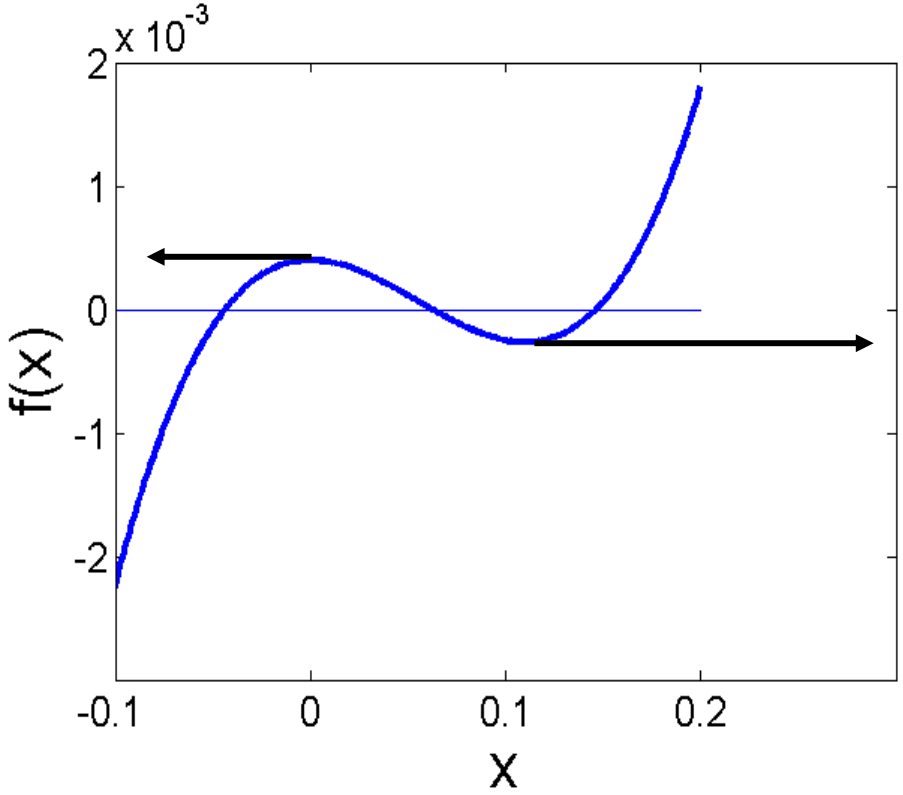
2. <u>Διαίρεση με το 0</u>
   για την

$$f(x) = x^3 - 0.03x^2 + 2.4\times10^{-6} = 0$$

η μέθοδος Newton-Raphson δίνει

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 0.03x_i^2 + 2.4\times10^{-6}}{3x_i^2 - 0.06x_i}$$

Για $x_0 = 0$ ή $x_0 = 0.02$, ο παρονομαστής είναι ίσος με 0.



πρόβλημα σε τιμές της παραγώγου κοντά στο 0

μειονεκτήματα – ταλαντώσεις κοντά σε τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα

3. <u>Προβλήματα κοντά σε τοπικά ακρότατα</u>

Με τη μέθοδο Newton-Raphson, μπορεί να υπάρξουν ταλαντώσεις γύρω από τοπικά ακρότατα χωρίς να συγκλίνουν σε μία ρίζα.

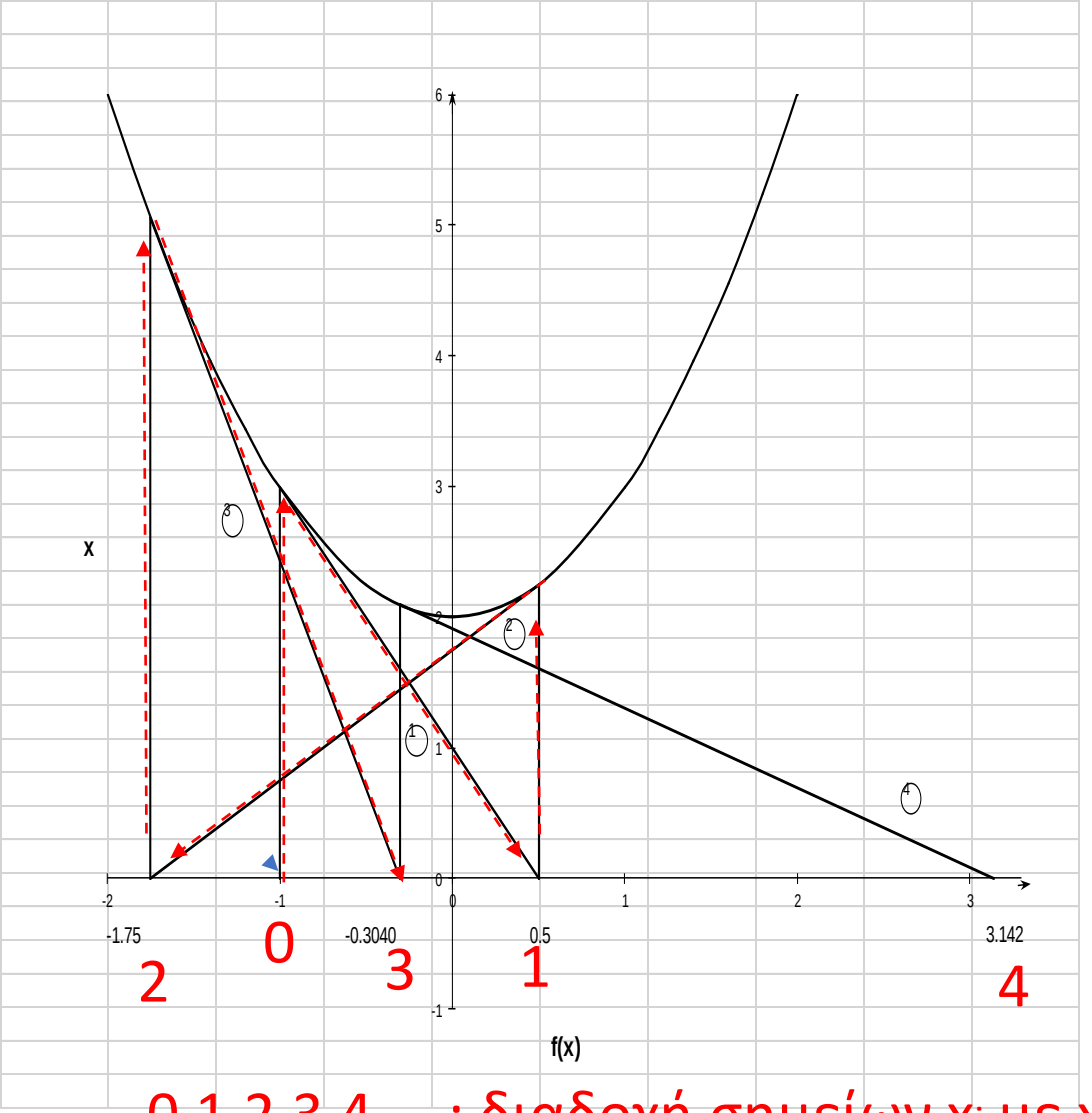
Επίσης, μετά από πολλές προσεγγίσεις, μπορεί να οδηγηθεί σε διαίρεση με τιμή κοντά στο 0 και να αποκλίνει.

Για παράδειγμα, η $f(x) = x^2 + 2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

μειονεκτήματα – ταλαντώσεις κοντά σε τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα

$$f(x) = x^2 + 2$$

i	x_i	$f(x_i)$	$\lvert\in_a\rvert\%$
0	–1.0000	3.00	
1	0.5	2.25	300.00
2	–1.75	5.063	128.571
3	–0.30357	2.092	476.47
4	3.1423	11.874	109.66
5	1.2529	3.570	150.80
6	–0.17166	2.029	829.88
7	5.7395	34.942	102.99
8	2.6955	9.266	112.93
9	0.97678	2.954	175.96



0,1,2,3,4,… : διαδοχή σημείων x_i με x_0=-1

μειονεκτήματα – Root Jumping

4. <u>Root Jumping</u>

Σε κάποιες περιπτώσεις που η $f(x)$ ταλαντώνεται και έχει πολλές ρίζες, αρχική τιμή κοντά σε ρίζα, μπορεί να οδηγήσει σε άλλη ρίζα.

$$f(x) = \sin x = 0$$

Για παράδειγμα

$$f(x) = \sin x = 0$$

επιλογή

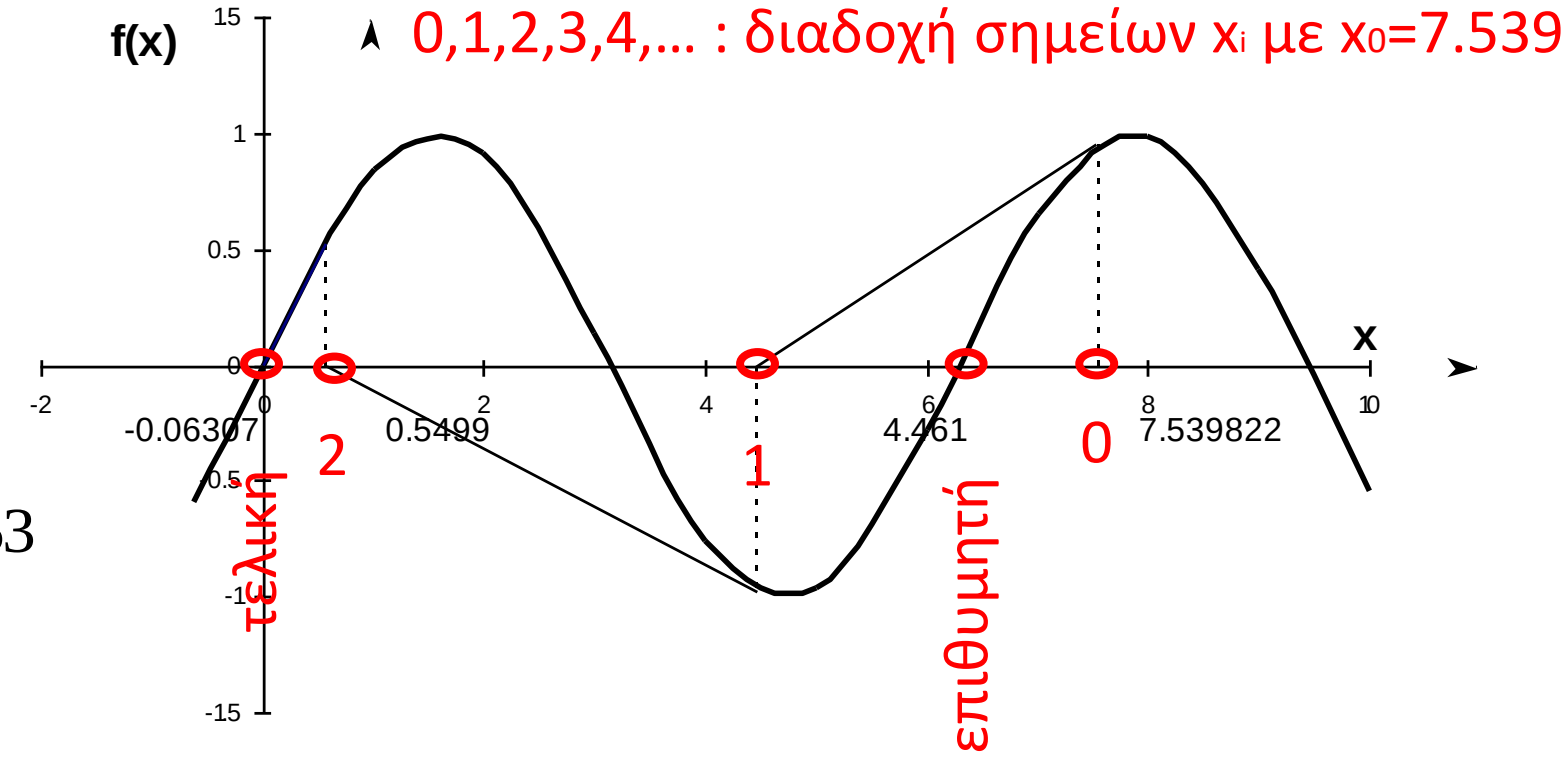
$$x_0 = 2.4\pi = 7.539822$$

Οδηγεί σε

$$x = 0$$

αντί

$$x = 2\pi = 6.2831853$$



Ασκηση: Να βρεθεί ρίζα της εξίσωσης $f(x) = e^{x-1} - 5x^3$=0 κοντά στην τιμή x=1.
Πόσο ακριβής είναι η εκτίμηση μετά από 4 προσεγγίσεις?
Πόσες προσεγγίσεις θα χρειαστούν με την μέθοδο της διχοτόμησης για την ίδια ακρίβεια?
Εκτιμήσετε τον αριθμό των σωστών ψηφίων μετά από κάθε προσέγγιση

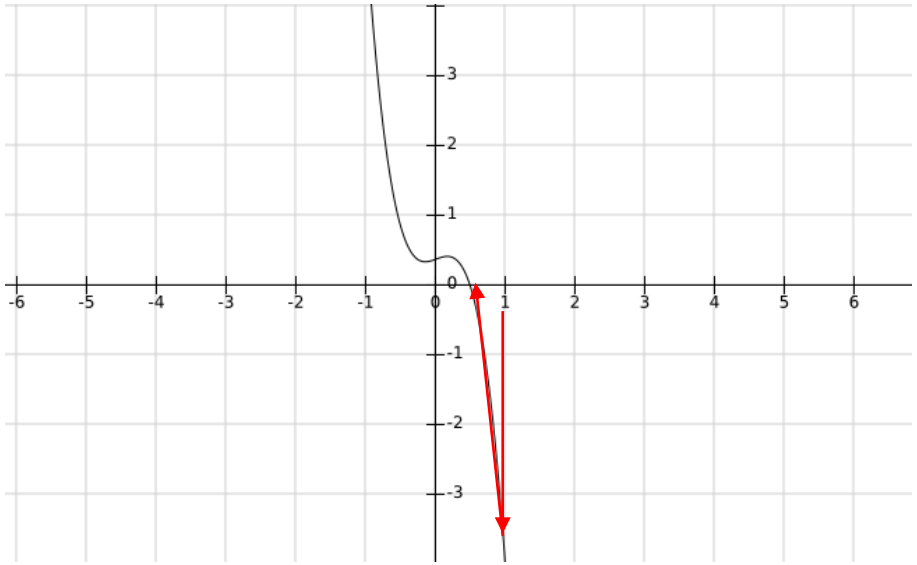
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$f'(x) = e^{x-1} - 15x^2$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{x-1} - 5x^3}{e^{x-1} - 15x^2}$$

i	xi	σφάλμα	m-n+1	m	n=m+1-(m-n+1)
0	1				
1	0.714285714	0.4	0	-1	0
2	0.559150291	0.2774485	0	-1	0
3	0.502159292	0.1134919	0	-1	0
4	0.494192785	0.0161202	-1	-1	1
5	0.494043693	0.0003018	-3	-1	3
6	0.494043641	1.046E-07	-6	-1	6
7	0.494043641	1.258E-14	-13	-1	13

Microsoft Excel Worksheet



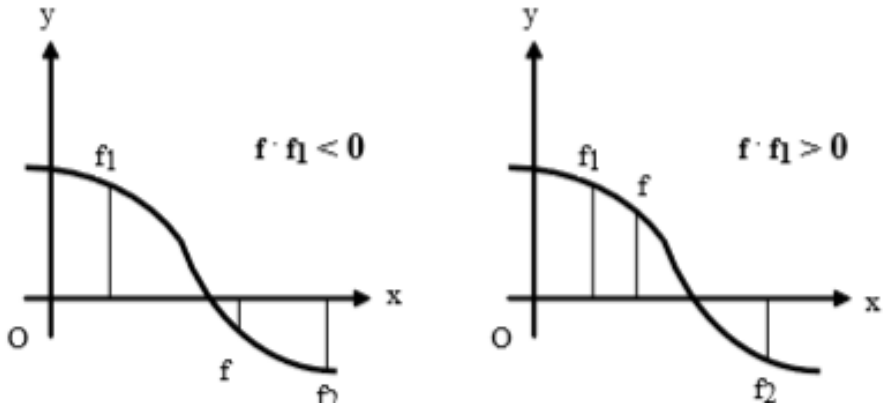
i	xi	σφάλμα
0	1	
1	=B7-(EXP(B7-1)-5*B7^3)/(EXP(B7-1)-15*B7^2)	=ABS((B7-B8)/B8)
2	=B8-(EXP(B8-1)-5*B8^3)/(EXP(B8-1)-15*B8^2)	=ABS((B8-B9)/B9)
3	=B9-(EXP(B9-1)-5*B9^3)/(EXP(B9-1)-15*B9^2)	=ABS((B9-B10)/B10)

Γιατί είναι απαραίτητη η δεύτερη παρένθεση?

- ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ
- ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON – RAPHSON
- ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ

2.4 ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ

Έστω η εξίσωση $f(x) = 0$. Ορίζεται ένα βήμα Δx και υπολογίζονται οι τιμές της f για x_0, $x_0 + \Delta x$, $x_0 + 2\Delta x$, κ.λ.π. Έστω f_1 , f_2 δύο τέτοιες διαδοχικές τιμές της f : $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_1+\Delta x)$. Αν $f_1 \cdot f_2 > 0$ τότε η διαδικασία συνεχίζεται Αν $f_1 \cdot f_2 < 0$, αυτό μαρτυρεί την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας στο διάστημα $(x_1, x_1 + \Delta x)$. Τότε το διάστημα αυτό διχοτομείται, δηλαδή λαμβάνεται το σημείο $x_1 + \Delta x/2$ και υπολογίζεται η τιμή της f στο σημείο αυτό. Αν η $|f|$ είναι μικρότερη από μια δεδομένη μικρή τιμή ε, τότε η διαδικασία τερματίζεται. Αλλιώς, εξετάζεται το γινόμενο $f \cdot f_1$. Αν $f \cdot f_1 < 0$, τότε $f_2 = f$ και η θέση 2 μετατίθεται στο f. Επακολουθεί νέα διχοτόμηση κ.ο.κ.



Αρχή της μεθόδου: Εξετάζουμε διαδοχικά διαστήματα με σκοπό τον προσδιορισμό διαστήματος στο οποίο η f να αλλάζει πρόσημο

Αν υποτεθεί ότι στο διάστημα $I = [a, b]$ υπάρχει μία μόνο ρίζα ξ της $f(x)$, τότε η μέθοδος της διχοτόμησης συγκλίνει.

Έστω $I_i = [a_i, b_i]$ το διάστημα μέσα στο οποίο εντοπίζεται η ρίζα ξ κατά το βήμα i. Αν l_i είναι το μήκος του διαστήματος αυτού, τότε το διάστημα του επόμενου βήματος θα έχει μήκος $l_{i+1} = l_i / 2$. Θα ισχύει επομένως

Μικρά "L"

$l_i = l / 2^i$, όπου l το μήκος του αρχικού διαστήματος I.

Θεωρούμε ότι η ρίζα ξ προσεγγίζεται με ακρίβεια ε, όταν $l_i \le \varepsilon$, ή όταν

$$2^i \ge l / \varepsilon$$

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των διαδοχικών διχοτομήσεων πρέπει να είναι

$$i \ge \log(l/\varepsilon) / \log 2$$

Δηλαδή χρειάζονται 17 προσεγγίσεις σε διάστημα ίσο με 1 για ακρίβεια 10^{-5}

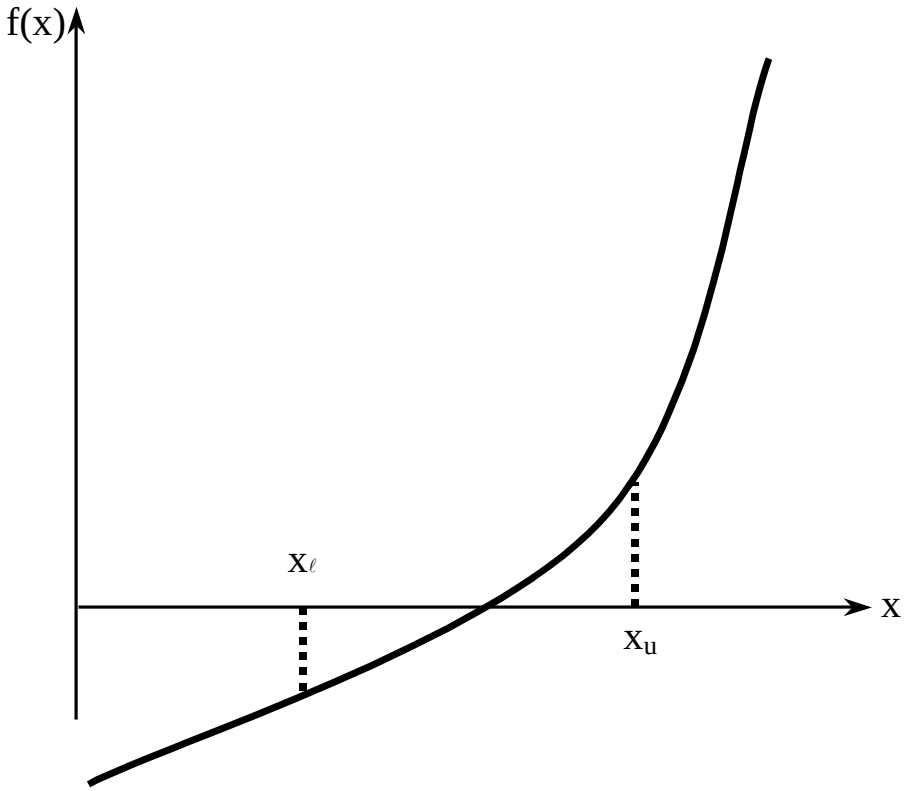
Για παράδειγμα, αν $l = 1$ και $\varepsilon = 10^{-5}$, $i \ge 5 / \log 2 = 16.6$. Συνεπώς, $i \ge 17$.

Η μέθοδος της διχοτόμησης χρησιμεύει κυρίως για τον εντοπισμό ριζών μη γραμμικών εξισώσεων. Ο ακριβέστερος υπολογισμός γίνεται με μια από τις άλλες μεθόδους.

Στο κεφάλαιο 9 δίνεται πρόγραμμα που εντοπίζει και υπολογίζει τις ρίζες της $f(x) = 2x^2 - 7x + 3 = 0$ ($\rho_1 = 0.5$ και $\rho_2 = 3.0$).

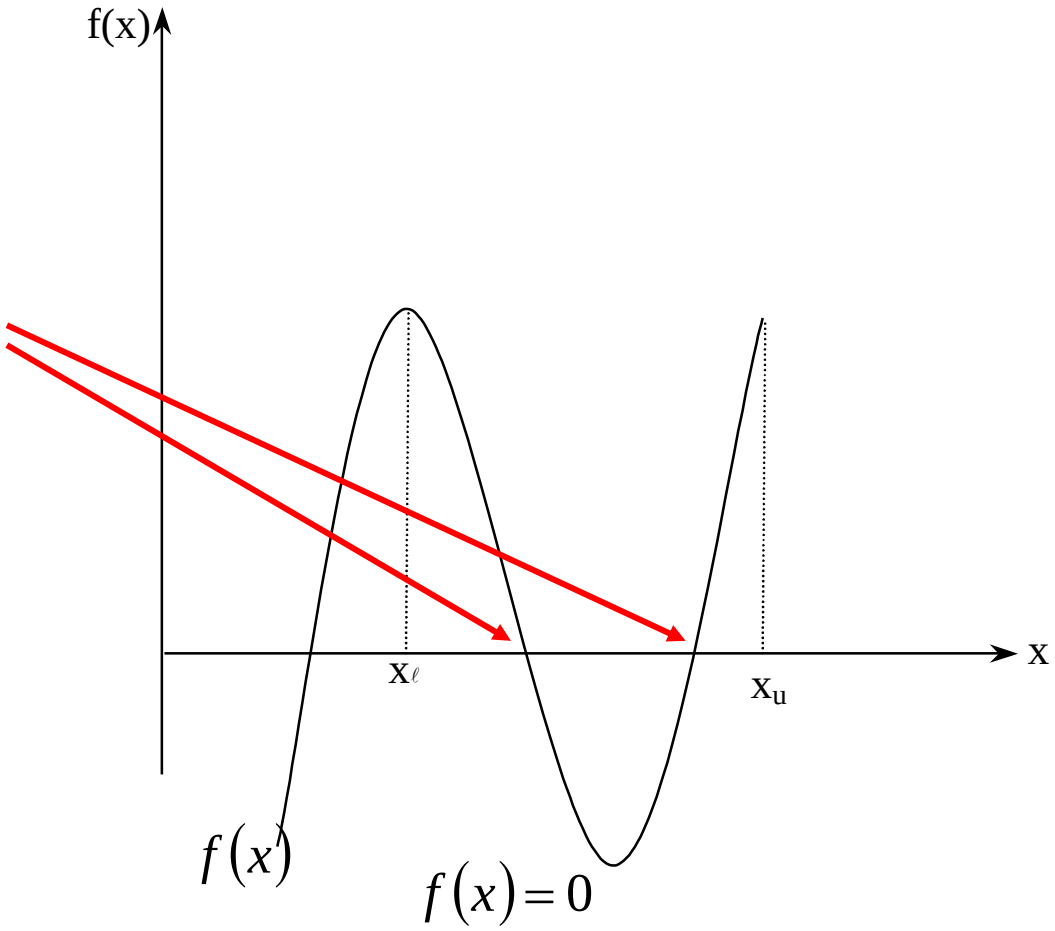
Μέθοδος διχοτόμησης

ΘΕΏΡΗΜΑ Εάν f(x)=0, όπου f(x) πραγματική συνεχής συνάρτηση, έχει μία τουλάχιστον ρίζα μεταξύ x_l και x_u εάν $f(x_l)\, f(x_u) < 0$.

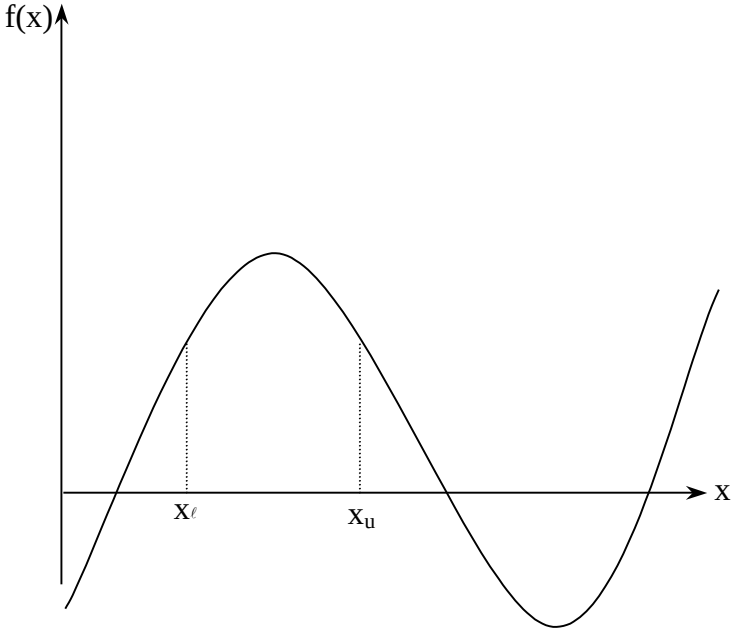


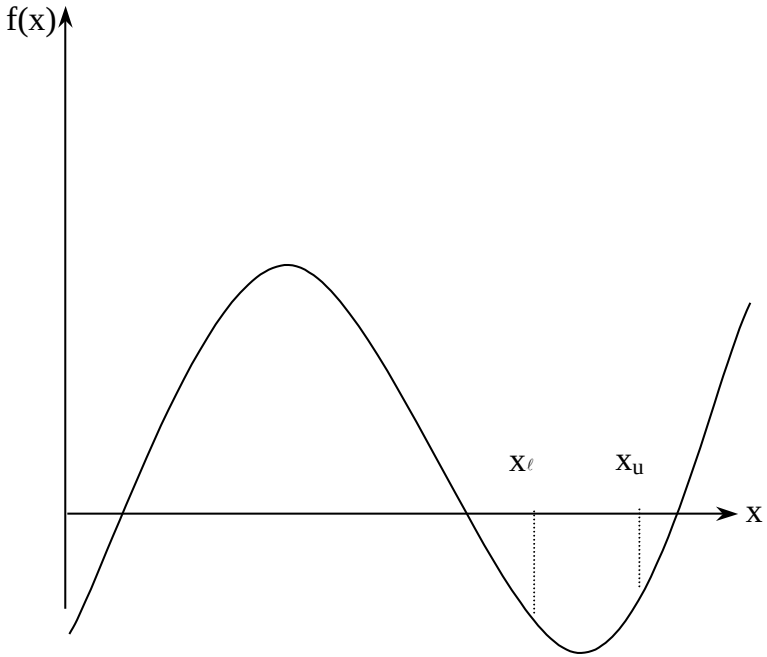
Μέθοδος διχοτόμησης

Εάν δεν αλλάζει πρόσημο, μπορεί πάλι να υπάρχουν ρίζες μεταξύ των δύο σημείων (ζυγός αριθμός ριζών).



Μέθοδος διχοτόμησης

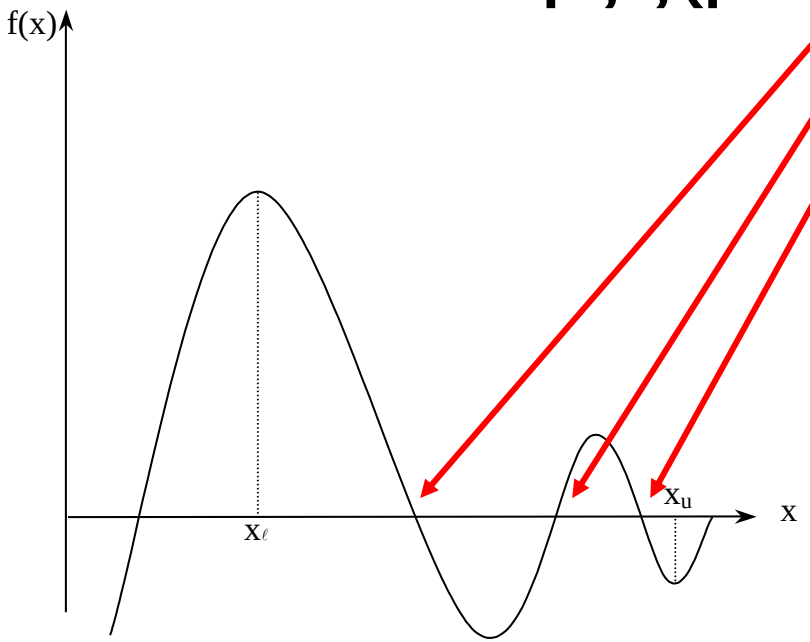




Μπορεί όμως και να μην υπάρχουν …

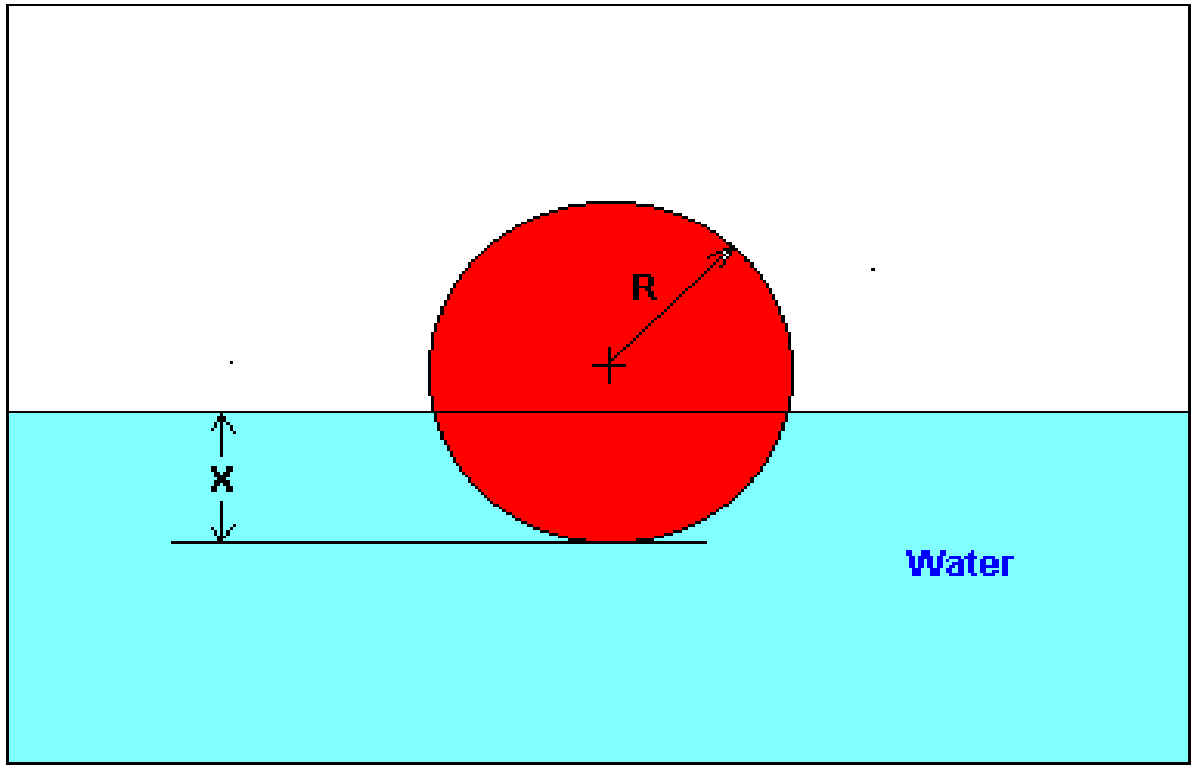
Μέθοδος διχοτόμησης

Εάν αλλάζει πρόσημο, μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία ρίζες (μονός αριθμός)



Παράδειγμα

Η επιπλέουσα σφαίρα του σχήματος έχει ειδικό βάρος 0.6 και ακτίνα 5.5 cm. Ποιο το βάθος x της σφαίρας όταν επιλέει?

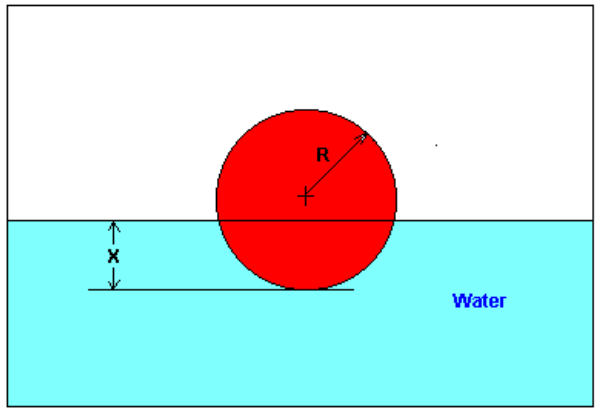


Παράδειγμα - συνέχεια

$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993\times10^{-4}$$

βάθος x σε μέτρα:

$$f'(x) = 3x^2 - 0.33x$$



Χρήση της μεθόδου της διχοτόμησης για να προσεγγιστεί η ρίζα (3 προσεγγίσεις) καθώς και το σχετικό προσεγγιστικό σφάλμα για κάθε προσέγγιση, και ο αριθμός των σωστών ψηφίων.

Σαν αρχικές τιμές, με βάση το πρόβλημα, θα θέσουμε τιμή μεταξύ 0 και την διάμετρο (0.11 m), λόγω της φύσης του προβλήματος.

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου το γράφημα στην περιοχή τιμών από 0 έως 2R= 0.11m

Παράδειγμα – συνέχεια

$x_\ell = 0.00$

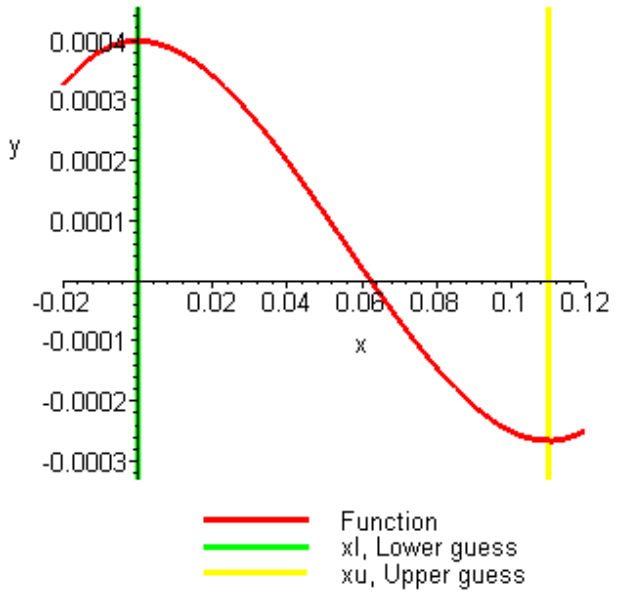
$x_u = 0.11$

Αρχικά ελέγχουμε εάν υπάρχει ρίζα μέσα στο διάστημα μεταξύ x_ℓ and x_u .

$$f(x_l) = f(0) = (0)^3 - 0.165(0)^2 + 3.993\times10^{-4} = 3.993\times10^{-4}$$

$$f(x_u) = f(0.11) = (0.11)^3 - 0.165(0.11)^2 + 3.993\times10^{-4} = -2.662\times10^{-4}$$

$$f(x_l)f(x_u) = \underset{+}{f(0)}\,\underset{-}{f(0.11)} = \left(3.993\times10^{-4}\right)\left(-2.662\times10^{-4}\right) < 0$$

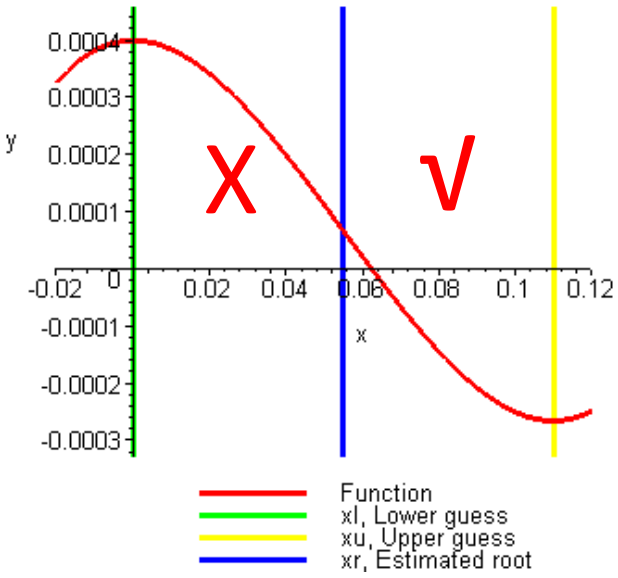


Αρα υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα. Πώς διαμορφώνεται η πρώτη προσέγγιση με βάση την μέθοδο της διχοτόμησης?

Παράδειγμα – συνέχεια

<u>Προσέγγιση 1</u>

Η εκτίμηση της ρίζας είναι: $x_m = \dfrac{x_\ell + x_u}{2} = \dfrac{0+0.11}{2} = 0.055$



$$f(x_m) = f(0.055) = (0.055)^3 - 0.165(0.055)^2 + 3.993\times10^{-4} = 6.655\times10^{-5}$$

$$f(x_l)f(x_m) = f(0)f(0.055) = \left(3.993\times10^{-4}\right)\left(6.655\times10^{-5}\right) > 0$$

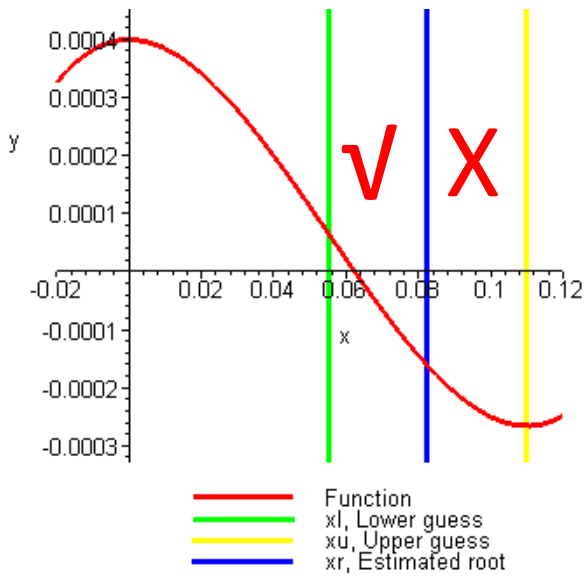
+ + Επομένως η ρίζα είναι μέσα στο άλλο διάστημα

Επομένως, η ρίζα προσδιορίζεται ανάμεσα στα x_m and x_u, δηλαδή, μεταξύ

$$x_l = 0.055, \quad x_u = 0.11$$

Σ'αυτό το σημείο, το σχετικό προσεγγιστικό σφάλμα δεν μπορεί να προσδιοριστεί, καθλως δεν υπάρχει προηγούμενη τιμή.

Παράδειγμα – συνέχεια



<u>Προσέγγιση 2</u>

Η εκτίμηση της ρίζας είναι: $$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2} = \frac{0.055 + 0.11}{2} = 0.0825$$

$$f(x_m) = f(0.0825) = (0.0825)^3 - 0.165(0.0825)^2 + 3.993\times10^{-4} = -1.622\times10^{-4}$$

$$f(x_l)f(x_m) = f(0.055)f(0.0825) = \left(-1.622\times10^{-4}\right)\left(6.655\times10^{-5}\right) < 0$$

- +

Επομένως η ρίζα είναι μέσα στο διάστημα

Επομένως, η ρίζα προσδιορίζεται ανάμεσα στα x_ℓ και x_m, δηλαδή, μεταξύ

$$x_l = 0.055,\ \ x_u = 0.0825$$

Το σχετικό προσεγγιστικό σφάλμα στο τέλος της προσέγγισης 2 είναι:

$$|\in_a| = \left|\frac{x_m^{new} - x_m^{old}}{x_m^{new}}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{0.0825 - 0.055}{0.0825}\right| \times 100$$

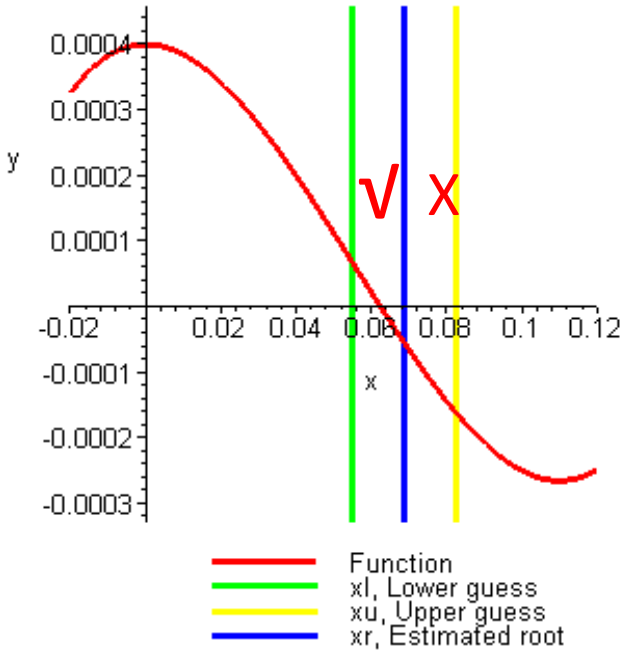
$$= 33.333\%$$

Κανένα σημαντικό ψηφίο δεν είναι σωστό στην εκτίμηση της ρίζας x_m = 0.0825 γιατί το σχετικό προσεγγιστικο σφάλμα είναι μεγαλύτερο από 5%.

Παράδειγμα – συνέχεια

<u>Προσέγγιση 3</u>

Η εκτίμηση της ρίζας είναι: $x_m = \dfrac{x_\ell + x_u}{2} = \dfrac{0.055 + 0.0825}{2} = 0.06875$



$$f(x_m) = f(0.06875) = (0.06875)^3 - 0.165(0.06875)^2 + 3.993\times10^{-4} = -5.563\times10^{-5}$$

$$f(x_l)f(x_m) = f(0.055)f(0.06875) = (6.655\times10^{-5})(-5.563\times10^{-5}) < 0$$

+ - Επομένως η ρίζα είναι μέσα στο διάστημα

Επομένως, η ρίζα προσδιορίζεται ανάμεσα στα x_ℓ και x_m, δηλαδή, μεταξύ

$$x_l = 0.055,\ \ x_u = 0.06875$$

Το σχετικό προσεγγιστικό σφάλμα στο τέλος της προσέγγισης 3 είναι:

$$|\in_a| = \left|\frac{x_m^{new} - x_m^{old}}{x_m^{new}}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{0.06875 - 0.0825}{0.06875}\right| \times 100$$

$$= 20\%$$

Ακόμα κανένα σημαντικό ψηφίο δεν είναι σωστό στην εκτίμηση της ρίζας x_m = 0.0825 γιατί το σχετικό προσεγγιστικο σφάλμα είναι μεγαλύτερο από 5%.

Παράδειγμα – συνέχεια

Προσεγγίσεις της ρίζας της f(x)=0 σαν συνάρτηση του αύξοντα αριθμού της προσέγγισης, με τη μέθοδο της διχοτόμησης.

Iteration	x_ℓ	x_u	x_m	$\lvert\epsilon_a\rvert$ %	$f(x_m)$
1	+ 0.00000	- 0.11	+ 0.055	----------	6.655×10^{-5}
2	+ 0.055	- 0.11	- 0.0825	33.33	-1.622×10^{-4}
3	+ 0.055	- 0.0825	- 0.06875	20.00	-5.563×10^{-5}
4	+ 0.055	- 0.06875	+ 0.06188	11.11	4.484×10^{-6}
5	+ 0.06188	- 0.06875	- 0.06531	5.263	-2.593×10^{-5}
6	+ 0.06188	- 0.06531	- 0.06359	2.702	-1.0804×10^{-5}
7	+ 0.06188	- 0.06359	- 0.06273	1.370	-3.176×10^{-6}
8	+ 0.06188	- 0.06273	+ 0.0623	0.6897	6.497×10^{-7}
9	+ 0.0623	- 0.06273	- 0.06252	0.3436	-1.265×10^{-6}
10	+ 0.0623	0.06252	0.06241	0.1721	-3.0768×10^{-7}

Παράδειγμα:

Να λυθεί η εξίσωση

y = x – 2 - ln(x) με την μέθοδο της διχοτόμησης

στο διάστημα [2.5,3.5].

Η λύση να βρεθεί με ακρίβεια 4 σημαντικών ψηφίων

x	y			
2.5	-0.41629073			
3.5	0.247237032			
3	-0.09861229	άρα μεταξύ:	3	3.5
3.25	0.071345004	άρα μεταξύ:	3	3.25
3.125	-0.01443428	άρα μεταξύ:	3.125	3.25
3.1875	0.02826309	άρα μεταξύ:	3.125	3.1875
3.15625	0.006865386	άρα μεταξύ:	3.125	3.15625
3.140625	-0.00379682	άρα μεταξύ:	3.140625	3.15625
3.1484375	0.001531202	άρα μεταξύ:	3.140625	3.1484375
3.14453125	-0.00113358	Κ.Ο.Κ.		
3.146484375	0.000198617			
3.145507813	-0.00046753			
3.145996094	-0.00013447			
3.146240234	3.20708E-05	ρίζα =	3.14624	

Πλεονεκτήματα

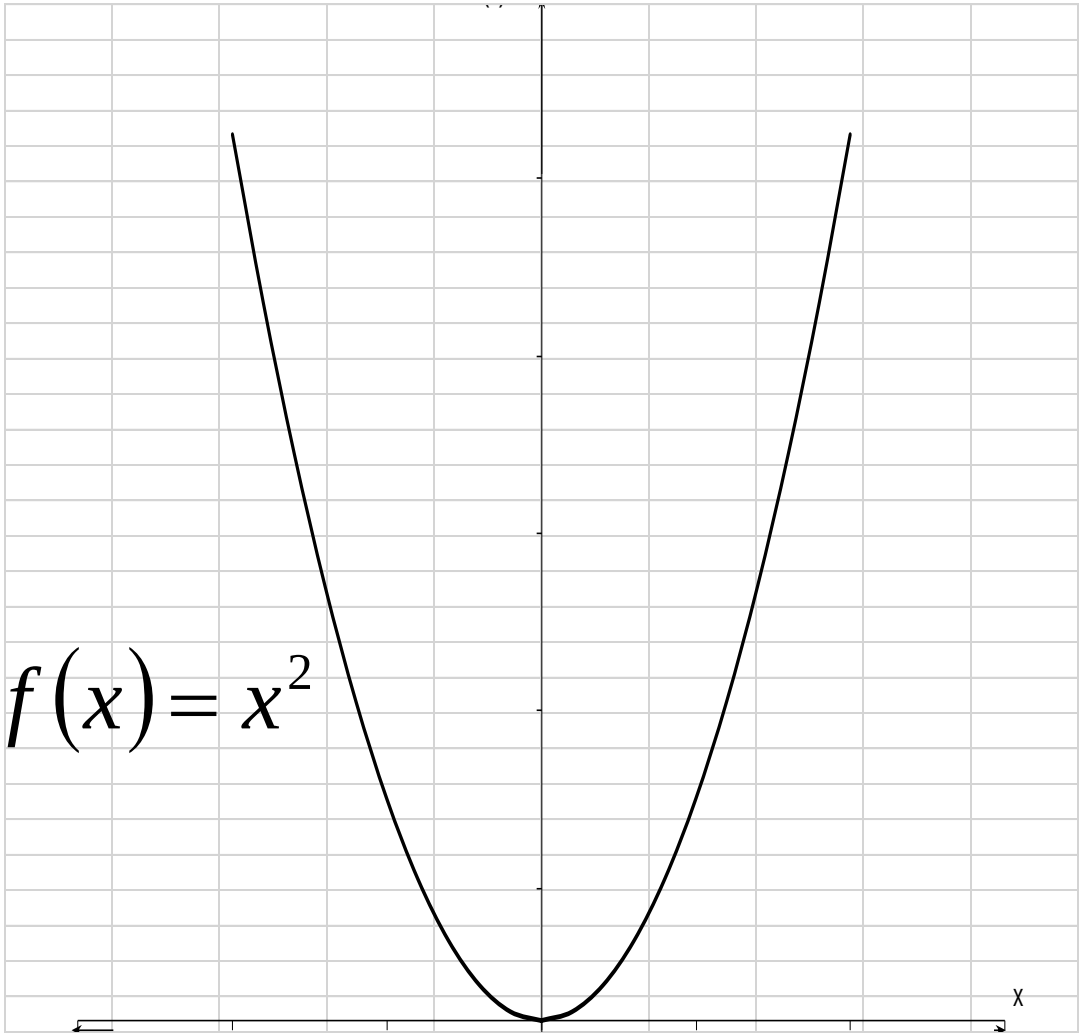
- Συγκλίνει πάντα
- Το διάστημα της ρίζας υποδιπλασιάζεται με κάθε προσέγγιση – σε κάθε περίπτωση.

μειονεκτήματα

- Αργή σύγκλιση
- Ακόμα πιο αργή, εάν η αρχική τιμή είναι κοντά στη ρίζα …

Μειονεκτήματα (συνέχεια)

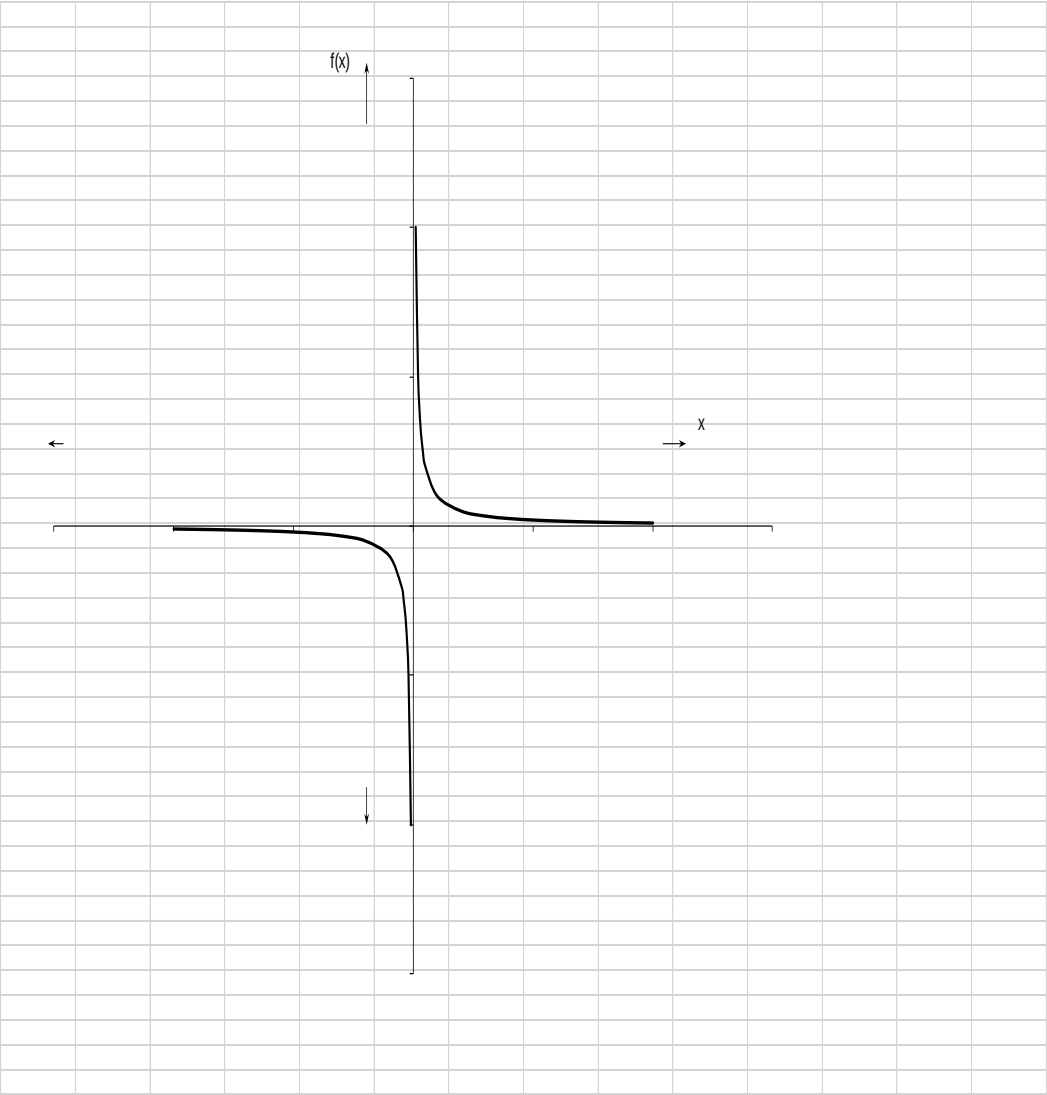
- Εάν η f(x) είναι τέτοια ώστε να εφάπτεται στον άξονα x, δεν είναι δυνατόν να βρεθούν το άνω και κάτω όριο του διαστήματος.



Μειονεκτήματα (συνέχεια)

- Η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο, ενώ δεν υπάρχει ρίζα

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



Ασκηση: Να βρεθεί ρίζα της εξίσωσης $f(x) = e^{x-1} - 5x^3$=0 κοντά στην τιμή x=1.

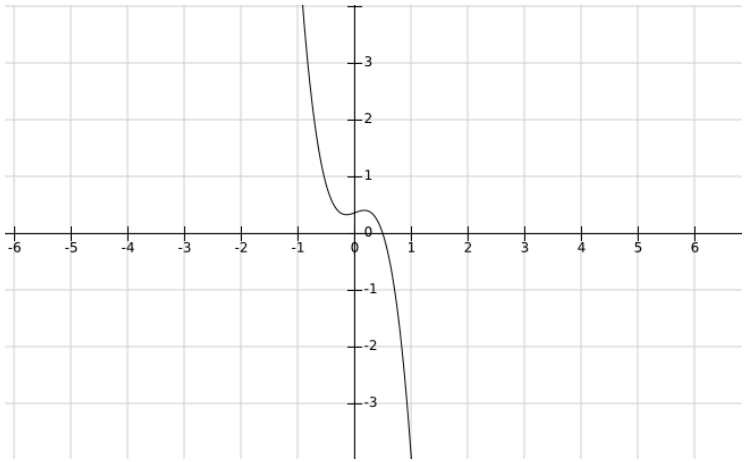
Πόσο ακριβής είναι η εκτίμηση μετά από 4 προσεγγίσεις?

Πόσες προσεγγίσεις θα χρειαστούν με την μέθοδο της διχοτόμησης για την ίδια ακρίβεια?

Εκτιμήσετε τον αριθμό των σωστών ψηφίων μετά από κάθε προσέγγιση

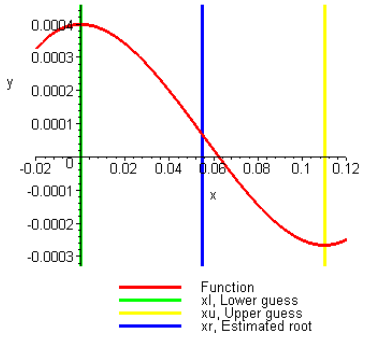
$f(x) = e^{x-1} - 5x^3$=0

	δοκιμή							νέο διάστημα	
i	από xl	έως xu	f(xl)	f(xu)	xi	f(xi)	διάστημα	από	έως
0	-0.50000	0.50000	0.84813	-0.01847	0.000000	0.36788	1.00000	0.00000	0.50000
1	0.00000	0.50000	0.36788	-0.00679	0.250000	0.39424	0.50000	0.25000	0.50000
2	0.25000	0.50000	0.39424	-0.00728	0.375000	0.27159	0.25000	0.37500	0.50000
3	0.37500	0.50000	0.27159	-0.00502	0.437500	0.15108	0.12500	0.43750	0.50000
4	0.43750	0.50000	0.15108	-0.00279	0.468750	0.07289	0.06250	0.46875	0.50000
5	0.46875	0.50000	0.07289	-0.00135	0.484375	0.02891	0.03125	0.48438	0.50000
6	0.48438	0.50000	0.02891	-0.00053	0.492188	0.00565	0.01563	0.49219	0.50000
7	0.49219	0.50000	0.00565	-0.00010	0.496094	-0.00630	0.00781	0.49219	0.49609
8	0.49219	0.49609	0.00565	-0.00004	0.494141	-0.00030	0.00391	0.49219	0.49414
9	0.49219	0.49414	0.00565	0.00000	0.493164	0.00268	0.00195	0.49316	0.49414
10	0.49316	0.49414	0.00268	0.00000	0.493652	0.00120	0.00098	0.49365	0.49414
11	0.49365	0.49414	0.00120	0.00000	0.493896	0.00045	0.00049	0.49390	0.49414
12	0.49390	0.49414	0.00045	0.00000	0.494019	0.00008	0.00024	0.49402	0.49414
13	0.49402	0.49414	0.00008	0.00000	0.494080	-0.00011	0.00012	0.49402	0.49408
14	0.49402	0.49408	0.00008	0.00000	0.494049	-0.00002	0.00006	0.49402	0.49405
15	0.49402	0.49405	0.00008	0.00000	0.494034	0.00003	0.00003	0.49403	0.49405
16	0.49403	0.49405	0.00003	0.00000	0.494041	0.00001	0.00002	0.49404	0.49405
17	0.49404	0.49405	0.00001	0.00000	0.494045	0.00000	0.00001	0.49404	0.49405
18	0.49404	0.49405	0.00001	0.00000	0.494043	0.00000	0.00000	0.49404	0.49405
19	0.49404	0.49405	0.00000	0.00000	0.494044	0.00000	0.00000	0.49404	0.49404
20	0.49404	0.49404	0.00000	0.00000	0.494044	0.00000	0.00000	0.49404	0.49404
21	0.49404	0.49404	0.00000	0.00000	0.494044	0.00000	0.00000	0.49404	0.49404
22	0.49404	0.49404	0.00000	0.00000	0.494044	0.00000	0.00000	0.49404	0.49404
23	0.49404	0.49404	0.00000	0.00000	0.494044	0.00000	0.00000	0.49404	0.49404
24	0.49404	0.49404	0.00000	0.00000	0.494044	0.00000	0.00000	0.49404	0.49404



Microsoft Excel Worksheet

Ασκηση: Να βρεθεί ρίζα της εξίσωσης $f(x) = e^{x-1} - 5x^3$=0 κοντά στην τιμή x=1.



Αλγόριθμος στο excel για την μέθοδο της διχοτόμησης

I5

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	δοκιμή							νέο διάστημα	
i	από xl	έως xu	f(xl)	f(xu)	xi	f(xi)	διάστημα	από	έως
0	-0.5	0.5	=EXP(B5-1)-5*B5^3	=EXP(C5-1)-5*C5^3	=(B5+C5)/2	=EXP(F5-1)-5*F5^3	=C5-B5	=IF(D5*G5<0;B5;B5+H5/2)	=I5+H5/2
1	=I5	=J5	=EXP(B6-1)-5*B6^3	=EXP(C6-1)-5*C6^3	=(B6+C6)/2	=EXP(F6-1)-5*F6^3	=C6-B6	=IF(D6*G6<0;B6;B6+H6/2)	=I6+H6/2
2	=I6	=J6	=EXP(B7-1)-5*B7^3	=EXP(C7-1)-5*C7^3	=(B7+C7)/2	=EXP(F7-1)-5*F7^3	=C7-B7	=IF(D7*G7<0;B7;B7+H7/2)	=I7+H7/2
3	=I7	=J7	=EXP(B8-1)-5*B8^3	=EXP(C8-1)-5*C8^3	=(B8+C8)/2	=EXP(F8-1)-5*F8^3	=C8-B8	=IF(D8*G8<0;B8;B8+H8/2)	=I8+H8/2
					=(B9+C9)/2	=EXP(F9-1)-5*F9^3	=C9-B9	=IF(D9*G9<0;B9;B9+H9/2)	=I9+H9/2

Καθορισμός του κάτω άκρου του επόμενου διαστήματος: Εάν fl*fm<0, το επόμενο διάστημα θα έχει κάτω άκρο το κάτω άκρο του τρέχοντος. Αλλιώς, το μέσο του τρέχοντος.

Το μήκος του διαστήματος

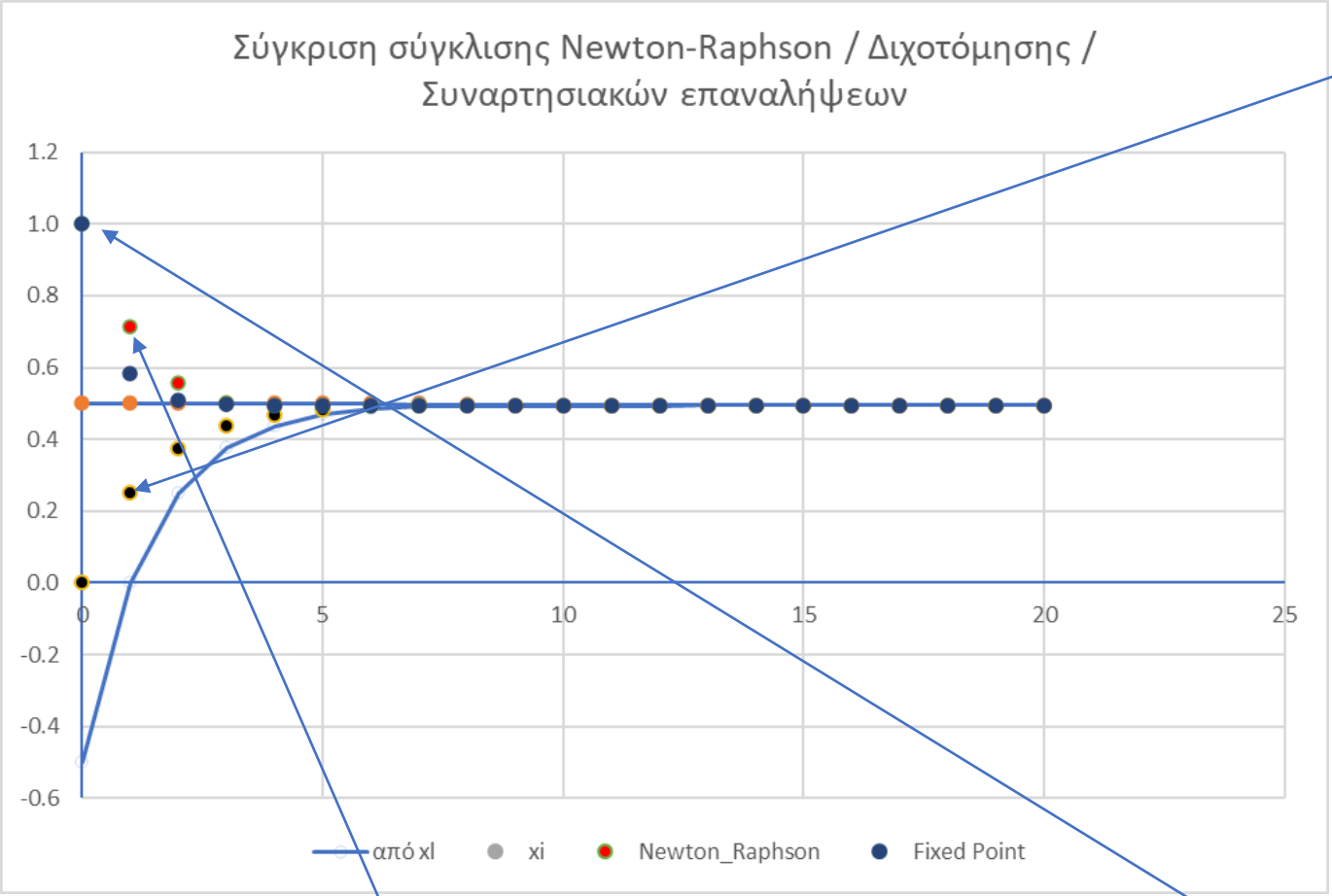
Η τιμή της συνάρτησης στο μέσο

Η τιμή του x στο μέσο

Οι τιμές στα όρια του διαστήματος

Τα όρια του νέου διαστήματος, από (I,J)

Το άνω άκρο του νέου διαστήματος, ίσο με το κάτω του + το μισό του μήκους του τρέχοντος



Μέθοδος Διχοτόμησης

i	από xl	έως xu	f(xl)	f(xu)	xi	f(xi)	διάστημα
0	-0.50000	0.50000	0.84813	-0.01847	0.000000	0.36788	1.00000
1	0.00000	0.50000	0.36788	-0.00679	0.250000	0.39424	0.50000
2	0.25000	0.50000	0.39424	-0.00728	0.375000	0.27159	0.25000
3	0.37500	0.50000	0.27159	-0.00502	0.437500	0.15108	0.12500
4	0.43750	0.50000	0.15108	-0.00279	0.468750	0.07289	0.06250
5	0.46875	0.50000	0.07289	-0.00135	0.484375	0.02891	0.03125
6	0.48438	0.50000	0.02891	-0.00053	0.492188	0.00565	0.01563
7	0.49219	0.50000	0.00565	-0.00010	0.496094	-0.00630	0.00781
8	0.49219	0.49609	0.00565	-0.00004	0.494141	-0.00030	0.00391
9	0.49219	0.49414	0.00565	0.00000	0.493164	0.00268	0.00195
10	0.49316	0.49414	0.00268	0.00000	0.493652	0.00120	0.00098
11	0.49365	0.49414	0.00120	0.00000	0.493896	0.00045	0.00049
12	0.49390	0.49414	0.00045	0.00000	0.494019	0.00008	0.00024
13	0.49402	0.49414	0.00008	0.00000	0.494080	-0.00011	0.00012
14	0.49402	0.49408	0.00008	0.00000	0.494049	-0.00002	0.00006
15	0.49402	0.49405	0.00008	0.00000	0.494034	0.00003	0.00003
16	0.49403	0.49405	0.00003	0.00000	0.494041	0.00001	0.00002
17	0.49404	0.49405	0.00001	0.00000	0.494045	0.00000	0.00001
18	0.49404	0.49405	0.00001	0.00000	0.494043	0.00000	0.00000
19	0.49404	0.49405	0.00000	0.00000	0.494044	0.00000	0.00000
20	0.49404	0.49404	0.00000	0.00000	0.494044	0.00000	0.00000

Μέθοδος Newton - Raphson

i	xi	σφάλμα	m-n+1	m	n=-(m-n+1)+m+1
0	1				
1	0.714285714	0.4	1	-1	-1
2	0.559150291	0.2774485	0	-1	0
3	0.502159292	0.1134919	0	-1	0
4	0.494192785	0.0161202	-1	-1	1
5	0.494043693	0.0003018	-3	-1	3
6	0.494043641	1.046E-07	-6	-1	6
7	0.494043641	1.258E-14	-13	-1	13

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{x-1} - 5x^3}{e^{x-1} - 15x^2}$$

Μέθοδος Συναρτησιακών Επαναλήψεων

$$g(x) = \left(\frac{e^{x-1}}{5}\right)^{1/3}$$

i	xi
0	1
1	0.584804
2	0.509218
3	0.496549
4	0.494456
5	0.494112
6	0.494055
7	0.494045
8	0.494044