Προσεγγιστικη επιλυση μη γραμμικων εξισωσεων

- ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ
  - ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ ΚΑΤΆ AITKEN
- ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON – RAPHSON
- ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΧΟΤΟΜΗΣΗΣ

Μέθοδος Συναρτησιακών επαναλήψεων

Δίνεται η μη γραμμική εξίσωση μιας μεταβλητής

$$f(x) = 0. \qquad (2.1)$$

Ζητείται να υπολογιστούν οι ρίζες της (2.1) σ' ένα διάστημα $a \le x \le b$.

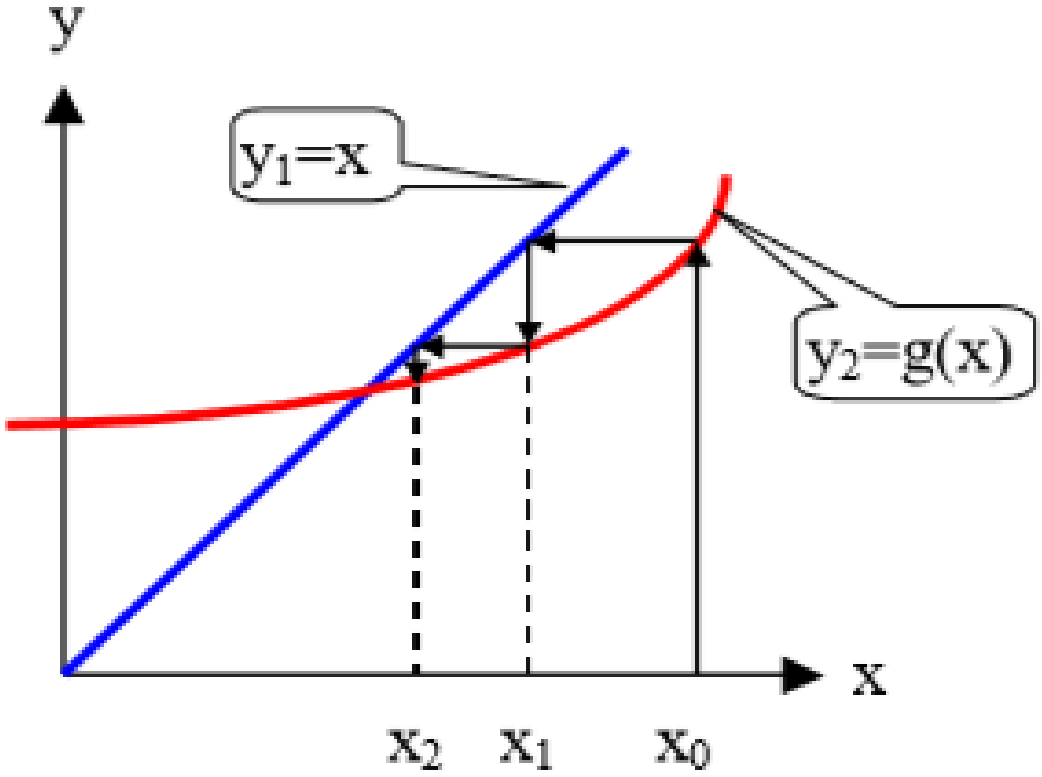
Η εξίσωση (2.1) γράφεται με την ισοδύναμη μορφή:

$$x = g(x) \qquad (2.2)$$

Στη συνέχεια, για τον υπολογισμό των ριζών, προτείνεται η παρακάτω επαναληπτική διαδικασία:

$$x_{i+1} = g(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.3)$$

όπου $\mathbf{x_0}$ είναι μια κατάλληλα εκλεγμένη **αρχική τιμή**.



Σχηματική αναπαράσταση της μετάβασης από x_0 σε $g(x_0)$ δηλαδή x_1, από το x_1 στο $g(x_1)$ δηλαδή x_2, κ.ο.κ.

Παράδειγμα: $f(x) = 2x^2 - 7x + 3 = 0$

Γνωστές ρίζες: 0.5 και 3

Γράφεται στη μορφή: $x = \dfrac{3 + 2x^2}{7} = g(x)$

Ελεγχος αποτελεσμάτων μεθόδου για διάφορες αρχικές τιμές:

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ = .2

i	x
0	.2
1	.44
2	.4838857
3	.4954701
4	.4987116
5	.4996324
6	.499895
7	.49997
8	.4999914

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ = .001

i	x
0	.001
1	.4285717
2	.4810496
3	.4946882
4	.4984904
5	.4995693
6	.499877
7	.4999649
8	.49999

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ = -.7

i	x
0	-.7
1	.5685714
2	.5209353
3	.5061067
4	.5017554
5	.5005024
6	.5001436
7	.500041
8	.5000117

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ = 1.5

i	x
0	1.5
1	1.071429
2	.7565597
3	.5921093
4	.528741
5	.5084477
6	.502434
7	.5006971
8	.5001993
9	.500057
10	.5000163
11	.5000046

… από διάφορες αρχικές τιμές, καταλήγουμε στη ρίζα 0.5 και όχι στη ρίζα 3.

Και με άλλες τιμές, μεγαλύτερες ??

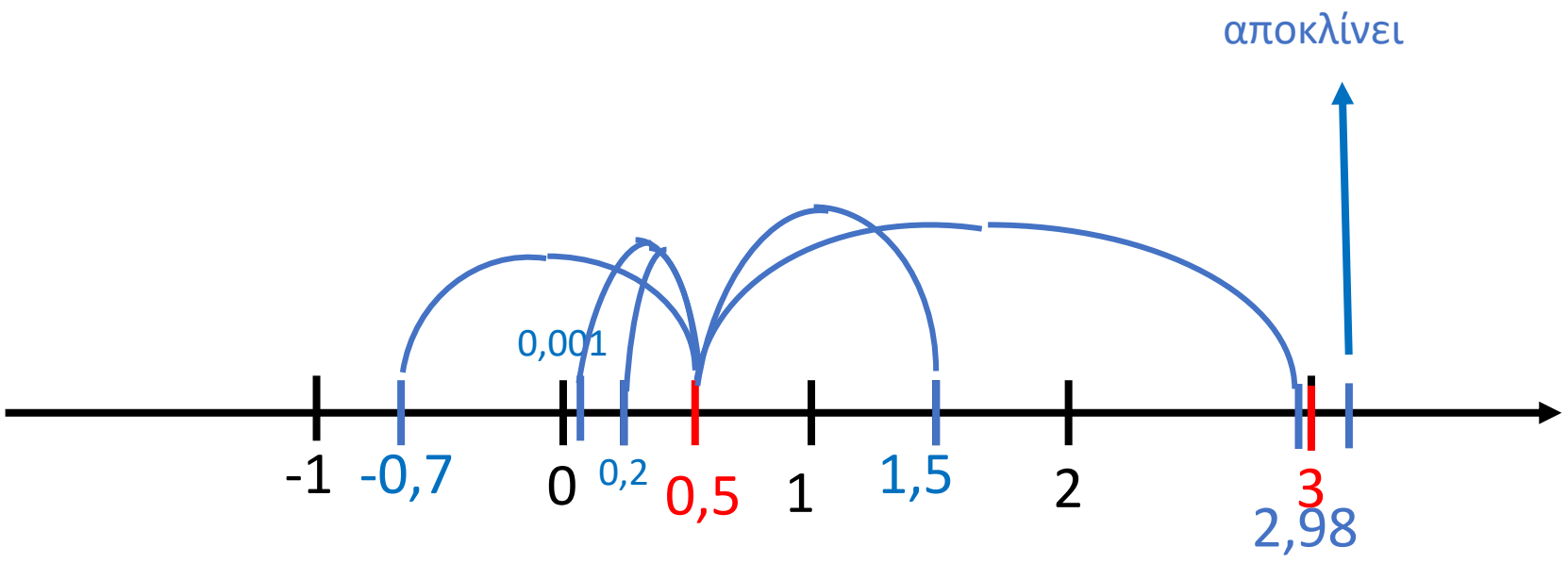
$$x = \frac{3 + 2x^2}{7} = g(x)$$

-0.7	0.001	0.2	1.5	2.98	3.1	4	10
0.568571	0.428572	0.44	1.071429	2.965829	3.174286	5	29
0.520935	0.48105	0.483886	0.75656	2.941754	3.307454	7.571429	240.7143
0.506107	0.494688	0.49547	0.592109	2.901119	3.554072	16.80758	16555.68
0.501755	0.49849	0.498712	0.528741	2.833283	4.037552	81.14136	78311549
0.500502	0.499569	0.499632	0.508448	2.722141	5.086235	1881.549	1.75E+15
0.500144	0.499877	0.499895	0.502434	2.54573	7.81994	1011493	8.77E+29
0.500041	0.499965	0.49997	0.500697	2.280211	17.90042	2.92E+11	2.2E+59
0.500012	0.49999	0.499991	0.500199	1.914104	91.97854	2.44E+22	1.4E+118
0.500003	0.499997	0.499998	0.500057	1.47537	2417.586	1.7E+44	5.4E+235
0.500001	0.499999	0.499999	0.500016	1.05049	1669921	8.29E+87	#NUM!
0.5	0.5	0.5	0.500005	0.743866	7.97E+11	2E+175	#NUM!

συγκλίνει στην 0,5 ακόμα
και με αρχικές τιμές
πολύ κοντά στη ρίζα 3

Αποκλίνει με αυξανόμενη ταχύτητα

Σύνοψη αποτελεσμάτων από διαφορετικές αρχικές τιμές:



$$f(x) = 0. \qquad x = g(x) \longrightarrow x_{i+1} = g(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Συμπέρασμα: η ακολουθία δεν συγκλίνει πάντα !!
Η σύγκλιση εξαρτάται από την αρχική τιμή x_0

Η σύγκλιση εξαρτάται από την αρχική τιμή, **αλλά και από την συνάρτηση**. Παράδειγμα:

$$f(x) = 2x^2 - 7x + 3 = 0 \qquad x = \frac{3 + 2x^2}{7} = g(x)$$ (Απλά λύνοντας ως προς x)

Διαιρώντας διά 2x, η εξίσωση διαμορφώνεται: $f(x) = x - 3{,}5 + \frac{1.5}{x} = 0$ οπότε: $g(x) = 3{,}5 - \frac{1{,}5}{x}$

-0.7	0.001	0.2	1.5	2.98	3.1	4	10
5.642857	-1496.5	-4	2.5	2.996644	3.016129	3.125	3.35
9.526239	639861.1	5	2.214286	2.994251	3.027724	3.21875	3.635
26.35692	1.17E+11	7.571429	1.829446	2.990153	3.047747	3.388672	4.203779
198.9107	3.91E+21	16.80758	1.384821	2.983148	3.082503	3.709456	5.477644
11304.85	4.37E+42	81.14136	0.976494	2.971191	3.143378	4.360019	9.00131
36514154	5.45E+84	1881.549	0.701012	2.950851	3.251664	5.859933	23.57817
3.81E+14	8.5E+168	1011493	0.568976	2.916435	3.44952	10.23966	159.2657
4.15E+28	#NUM!	2.92E+11	0.521067	2.85874	3.82834	30.3859	7247.731
4.91E+56	#NUM!	2.44E+22	0.506146	2.763542	4.616054	264.2294	15008459
6.9E+112	#NUM!	1.7E+44	0.501767	2.610618	6.516558	19948.19	6.44E+13
1.4E+225	#NUM!	8.29E+87	0.500506	2.375807	12.56158	1.14E+08	1.18E+27

Αποκλίνει, αν και συνέκλινε — συγκλίνει στην 0,5 — Αποκλίνει με αυξανόμενη ταχύτητα

Συμπέρασμα: Η σύγκλιση εξαρτάται και από τη μορφή της συνάρτησης, αλλά και από την αρχική τιμή

Θεωρία σύγκλισης

Αναζήτηση κριτηρίων σύγκλισης:

Για να εξεταστεί η σύγκλιση, σχηματίζεται η ποσότητα: $\varepsilon_i = x_i - \xi$

(Διαφορά προσεγγιστικής τιμής από τη ρίζα = σφάλμα)

Θεώρημα 1:

Έστω διάστημα $I = [a, b]$, *που να περιέχει μια ρίζα* ξ *της* $x = g(x)$, *και στο οποίο* $|g'(x)| \leq K < 1 \ \forall \ x \in I$.

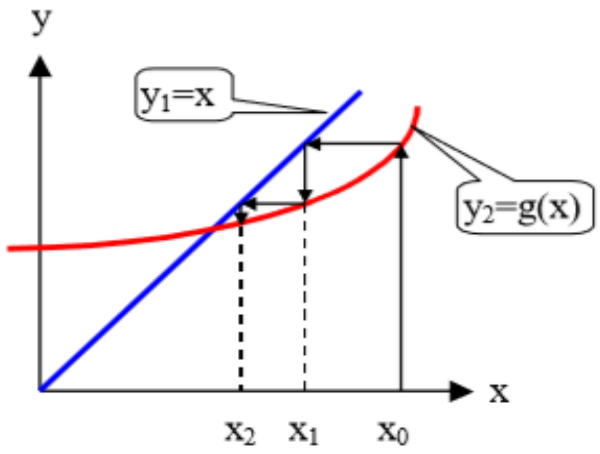
Τότε δεν υπάρχει άλλη ρίζα μέσα στο ίδιο διάστημα.

Υποθέτοντας ότι κάποιο x_i ανήκει στο I, αποδεικνύεται ότι κάθε νέα προσέγγιση θα απέχει από τη ρίζα λιγότερο από ότι η προηγούμενη αφού το K είναι μικρότερο από 1:

$$|x_{i+1} - \xi| = |g(x_i) - g(\xi)| = |g'(\xi_i)| \cdot |x_i - \xi| \leq K \cdot |x_i - \xi|.$$

Θεώρημα 2:

Έστω ξ *μια ρίζα της* $f(x) = 0$, *ή της ισοδύναμής της* $x = g(x)$ *και ένα διάστημα ακτίνας* h *γύρω από το σημείο* $x = \xi$. *Ακόμη, οι* $g(x)$, $g'(x)$ *υποτίθενται συνεχείς στο διάστημα* I *με* $|g'(x)| \leq K < 1$. *Τότε, αν* $x_0 \in I$, *η διαδικασία* $x_{i+1} = g(x_i)$ *συγκλίνει στο* ξ. *Επίσης, όλες οι ενδιάμεσες προσεγγίσεις βρίσκονται μέσα στο διάστημα* I.



Τα θεωρήματα 1 και 2 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πρακτική εφαρμογή της μεθόδου των συναρτησιακών επαναλήψεων.

Πράγματι, για την περίπτωση της $g(x) = \frac{3+2x^2}{7}$

από τη συνθήκη $|g'(x)| < 1$ προκύπτει $\left|\frac{4x}{7}\right| < 1$ ή $|x| < 1.75$.

Εξάλλου, $f(-1.74) \cdot f(1.74) < 0$, όπου η f δίνεται από την $f(x) = 2x^2 - 7x + 3 = 0$

Επομένως, προσδιορίσαμε ένα διάστημα I ως εξής: από την παράγωγο της συνάρτησης, Βρίσκουμε την περιοχή που αυτή έχει απόλυτη τιμή μικρότερη από 1. Εάν υπάρχει μία ρίζα της εξίσωσης σ'αυτό το διάστημα, κάθε επόμενη προσέγγιση, θα βρίσκεται επίσης μέσα στο διάστημα. Επίσης (Θ1), δεν θα υπάρχει άλλη ρίζα στο διάστημα

Επομένως, στο διάστημα [-1.74, 1.74] περιέχεται μία και μόνη ρίζα, η οποία ξέρουμε ότι είναι η 0.5
Εχοντας εκτελέσει την διαδικασία με αρχικές τιμές μέσα στο παραπάνω διάστημα (τις 0.001, -0.7, 1.5), έχουμε επαληθεύσει το γεγονός ότι και όλες οι ενδιάμεσες προσεγγίσεις είναι μέσα στο διάστημα. Εδώ επαληθεύεται και για άλλες δύο αρχικές τιμές του διαστήματος:

Τα παραπάνω, εξηγούν την συμπεριφορά της διαδικασίας όταν οι αρχικές τιμές είναι μέσα στο διάστημα. Η συμπεριφορά της διαδικασίας με αρχικές τιμές έξω από το διάστημα, θα εξεταστεί παρακάτω.

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ = -1		ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ = -1.5	
i	x	i	x
0	-1	0	-1.5
1	.7142857	1	1.071429
2	.574344	2	.7565597
3	.5228203	3	.5921093
4	.5066689	4	.528741
5	.5019181	5	.5084477
6	.5005491	6	.502434
7	.5001569	7	.5006971
8	.5000448	8	.5001993
9	.5000128	9	.500057
		10	.5000163
		11	.5000046

Παράδειγμα συνάρτησης όπου οι ενδιάμεσες τιμές «βγαίνουν από το διάστημα»

$$f(x) = e^{-0.1x} + \frac{cosx}{1.09} - x$$

$$x = e^{-0.1x} + \frac{cosx}{1.09}$$

$$g(x) = e^{-0.1x} + \frac{cosx}{1.09}$$

$$g'(x) = -0.1 * e^{-0.1x} - \frac{sinx}{1.09}$$

I=[0.7,1.4] για |g'(x)|<1

Και [0.7-g(0.7)]*[1.4-g(1.4)]<0

Αρα στο I υπάρχει μία μόνο ρίζα της εξίσωσης.

Όμως, με αρχική τιμή 0.87, οι διαδοχικές τιμές βγαίνουν έξω από το διάστημα:

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ = .87

	x	g(x)	g´(x)	x_1
0	.87	1.508261	-.7928869	1.508261
1	1.508261	.9173316	-1.001638	.9173316
2	.9173316	1.470093	-.8196589	1.470093
3	1.470093	.9555187	-.9991118	.9555187
4	.9555187	1.438399	-.8400736	1.438399
5	1.438399	.9871373	-.9960047	.9871373

Η προβληματική αυτή κατάσταση, διορθώνεται εάν Χρησιμοποιηθεί ο τύπος:

$$x_{i+1} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

Αποδεικύεται ότι με αυτή τη διαδικασία, όταν βρεθεί μία τιμή με την απλή διαδικασία που βγαίνει έξω από το I, θα μείνει μέσα στο I.

Αυτή όμως η καινούργια διαδικασία, συγκλίνει αργότερα. Για να ληφθεί υπόψη, αλλά και να παραμείνει σημαντικός ο ρυθμός σύγκλισης, λαμβάνουμε υπόψη το επόμενο θεώρημα, από το οποίο προκύπτει μια ενδιάμεση διαδικασία …

Θεώρημα 3:

Έστω ξ μια ρίζα της $f(x) = 0$, *ή της ισοδύναμής της* $x = g(x)$ *και ένα διάστημα* I, *που περιέχει την ξ. Ακόμη, οι* $g(x)$, $g'(x)$ *υποτίθενται συνεχείς στο διάστημα* I *με* $|g'(x)| \le K < 1$. *Τότε, έστω* $x_0 \in I$ *και*

$$x_{i+1} = \begin{cases} g(x_i), & \text{αν } g(x_i) \in I \\ \dfrac{x_i + g(x_i)}{2}, & \text{αν } g(x_i) \notin I \end{cases}$$

Τότε η ακολουθία $\{x_i\}$ *συγκλίνει στο ξ. Επίσης, όλες οι ενδιάμεσες προσεγγίσεις βρίσκονται μέσα στο διάστημα* I.

Σύμφωνα με την νέα αυτή, τροποποιημένη διαδικασία, όταν βρεθεί προσεγγιστική τιμή έξω από το I, διορθώνεται. Αυτή η διαδικασία, αποδείχθηκε ότι συγκλίνει πάντα, διότι οι τιμές με αυτόν τον τρόπο μένουν μέσα στο I. Ο αλγόριθμος αυτός εφαρμόζεται στο παραπάνω πρόβλημα με την ίδια αρχική τιμή, και συγκλίνει ταχύτατα.

Προηγούμενη διαδικασία

$$g(x) = e^{-0.1x} + \frac{cosx}{1.09}$$

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ = .87

	x	g(x)	g´(x)	x_1
0	.87	1.508261	-.7928869	1.508261
1	1.508261	.9173316	-1.001638	1.212796
2	1.212796	1.207256	-.9478442	1.207256
3	1.207256	1.212502	-.946099	1.212502
4	1.212502	1.207534	-.9477523	1.207534
5	1.207534	1.212239	-.9461873	1.212239
6	1.212239	1.207784	-.9476699	1.207784
7	1.207784	1.212003	-.9462665	1.212003
8	1.212003	1.208008	-.9475958	1.208008
9	1.208008	1.211791	-.9463374	1.211791

.....

100	1.209937	1.209965	-.9469468	1.209965
101	1.209965	1.209938	-.9469556	1.209938
102	1.209938	1.209963	-.9469472	1.209963
103	1.209963	1.20994	-.9469551	1.20994
104	1.20994	1.209962	-.9469476	1.209962
105	1.209962	1.209941	-.9469547	1.209941
106	1.209941	1.209961	-.9469481	1.209961
107	1.209961	1.209942	-.9469544	1.209942
108	1.209942	1.20996	-.9469483	1.20996
109	1.20996	1.209943	-.9469541	1.209943
110	1.209943	1.209959	-.9469486	1.209959
111	1.209959	1.209944	-.9469538	1.209944
112	1.209944	1.209958	-.9469489	1.209958
113	1.209958	1.209944	-.9469535	1.209944
114	1.209944	1.209957	-.9469492	1.209957
115	1.209957	1.209945	-.9469533	1.209945
116	1.209945	1.209957	-.9469494	1.209957
117	1.209957	1.209946	-.9469531	1.209946
118	1.209946	1.209956	-.9469496	1.209956
119	1.209956	1.209946	-.9469529	1.209946

Η νέα διαδικασία συγκλίνει ταχύτατα

$$x_{i+1} = \frac{x_i + g(x_i)}{2}$$

ΑΡΧΙΚΗ ΤΙΜΗ = .87

	x	g(x)	g´(x)	x_1
0	.87	1.508261	-.7928869	1.189131
1	1.189131	1.229598	-.9402063	1.209364
2	1.209364	1.210507	-.9467662	1.209936
3	1.209936	1.209966	-.9469464	1.209951
4	1.209951	1.209952	-.9469512	1.209951

Γενικό συμπέρασμα: Εχοντας f(x)=0, μπορούμε να βρούμε μία ρίζα της με διαδοχικές επαναλήψεις της μορφής x=g(x) (ή δύο εναλλακτικών μορφών, σε διάστημα το οποίο προσδιορίζεται από την Ig’(x)I<1.
Προϋπόθεση είναι οι g(x) και g’(x) να είναι συνεχείς στο διάστημα.
Υπάρχει βεβαιότητα σύγκλισης, μόνο εάν και η ρίζα, και η αρχική τιμή είναι μέσα στο διάστημα.

Σύνοψη των τριών διαδικασιών

- Απλή διαδικασία (πιθανόν να μη συγκλίνει):

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

- Διαδικασία μεσου όρου καινούργιας και προηγούμενης τιμής (πολύ πιθανότερο να συγκλίνει)

$$x_{i+1} = \frac{x_i + g(x_i)}{2}$$

- Διαδικασία λήψης του μέσου όρου σε περίπτωση που η καινούργια τιμή είναι έξω από το διάστημα (παραμένει στο διάστημα, και επομένως συγκλίνει, σε κάποιες περιπτώσεις με αργότερο ρυθμό):

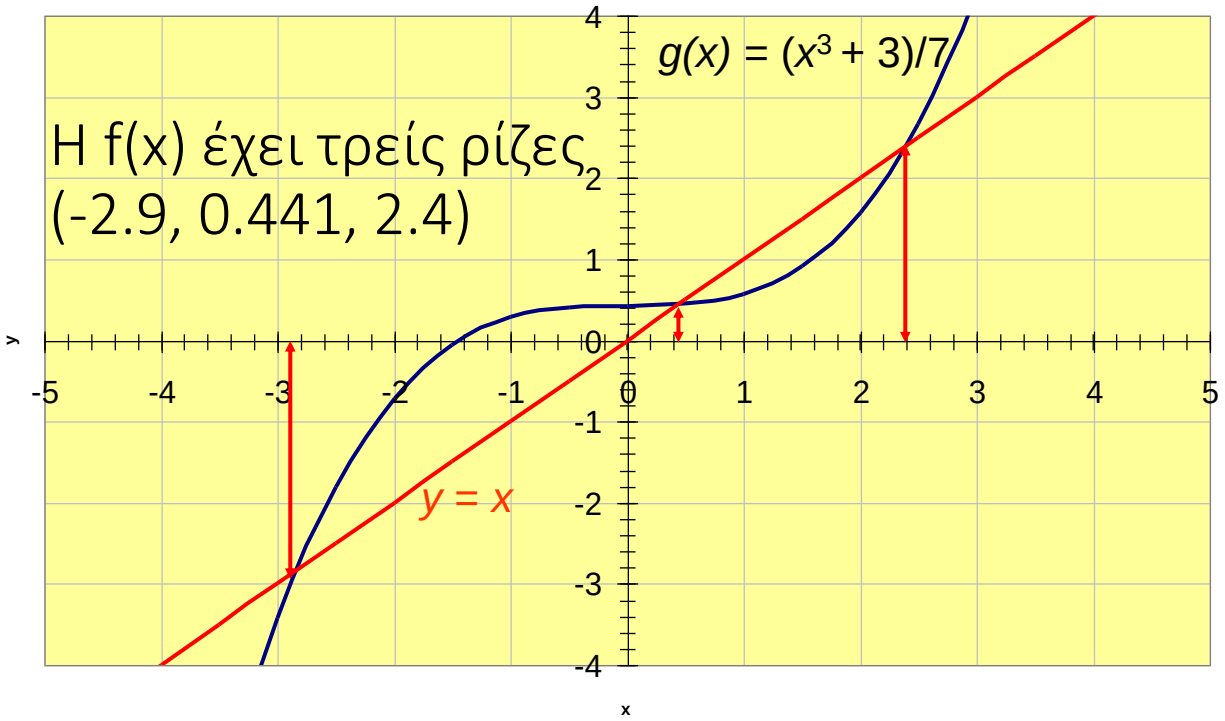
$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{cases} g(\mathbf{x}_i), & \text{αν } g(\mathbf{x}_i) \in I \\ \dfrac{\mathbf{x}_i + g(\mathbf{x}_i)}{2}, & \text{αν } g(\mathbf{x}_i) \notin I \end{cases}$$

Ασκηση μεθόδου συναρτησιακών επαναλήψεων (Fixed Point Iteration)

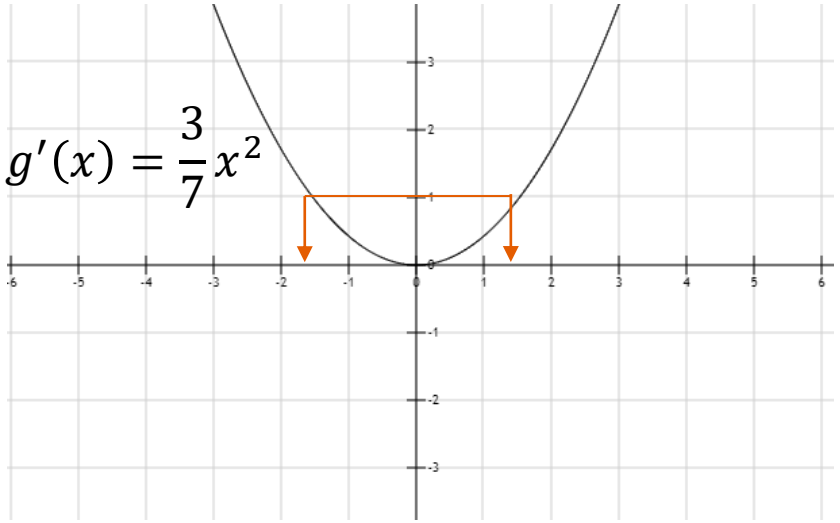
Η εξίσωση f(x) = 0, όπου f(x) = $x^3 - 7x + 3$, μπορεί να μετασχηματιστεί στην x = g(x) = $(x^3 + 3)/7$.

Βρείτε σε ποιο διάστημα μπορούμε να προσδιορίσουμε ρίζα της f(x) με την μέθοδο.

Οι τομές των γραφημάτων $y = x$ και $y = (x^3 + 3)/7$ αναπαριστούν τις ρίζες της αρχικής $x^3 - 7x + 3 = 0$.



Η παράγωγος της |g(x)|<1 για :-1.52<x<1.52



Επομένως, στο διάστημα αυτό η μέθοδος συγκλίνει!

Διαδικασία προσεγγίσεων:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^{\ 3} + 3}{7}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

4 προσεγγίσεις από την αρχική τιμή $x_0 = 2$.

$$x_1 = \frac{x_0^{\ 3} + 3}{7} = \frac{2^3 + 3}{7} = 1.57143$$

$$x_2 = \frac{x_1^{\ 3} + 3}{7} = \frac{1.57143^3 + 3}{7} = 0.98292$$

$$x_3 = \frac{x_2^{\ 3} + 3}{7} = \frac{0.98292^3 + 3}{7} = 0.56423$$

$$x_4 = \frac{x_3^{\ 3} + 3}{7} = \frac{0.56423^3 + 3}{7} = 0.45423$$

etc.

Όπως θα δούμε στην επόμενη διαφάνεια
η διαδικασία συγκλίνει προς: α = **0.441** (με 3 σημαντικά ψηφία)

Παρόλο που το 2 είναι έξω από το διάστημα $-1.52<x<1.52$

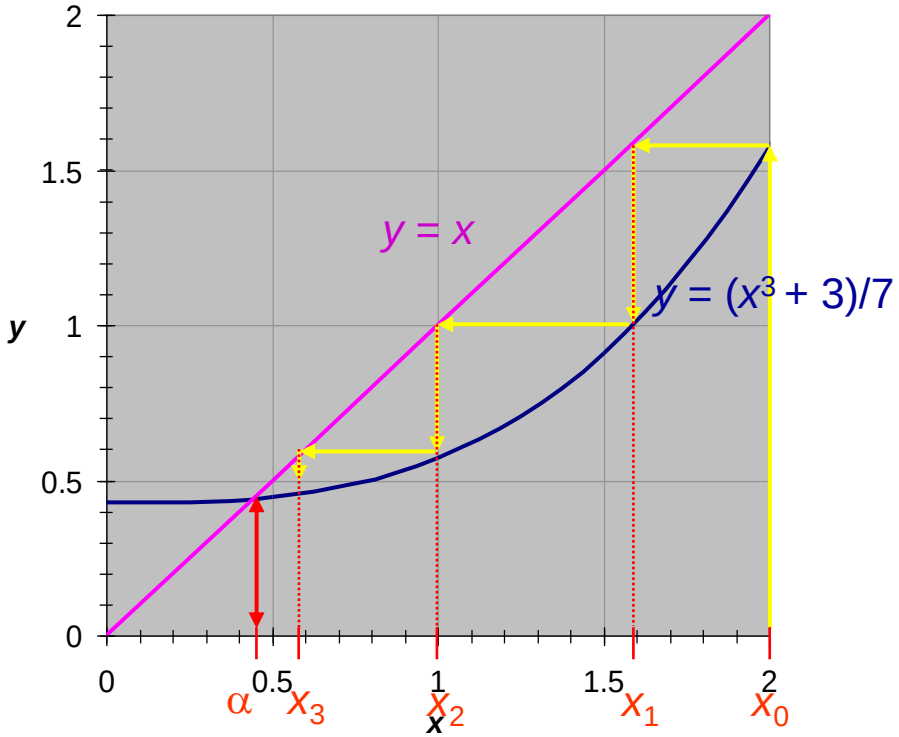
$$x_{n+1} = \frac{x_n^{\,3} + 3}{7}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Για $x_0 = 2$ συγκλίνει προς την μεσαία ρίζα.

Η α=0.441 είναι μέσα στο διάστημα -1.52<x<1.52

Υπενθυμίζεται ότι η f(x) έχει τρείς ρίζες (-2.9, 0.441, 2.4)

n	x_n
0	2
1	1.57143
2	0.98292
3	0.56423
4	0.45423
5	0.44196
6	0.4409
7	0.44082
8	0.44081



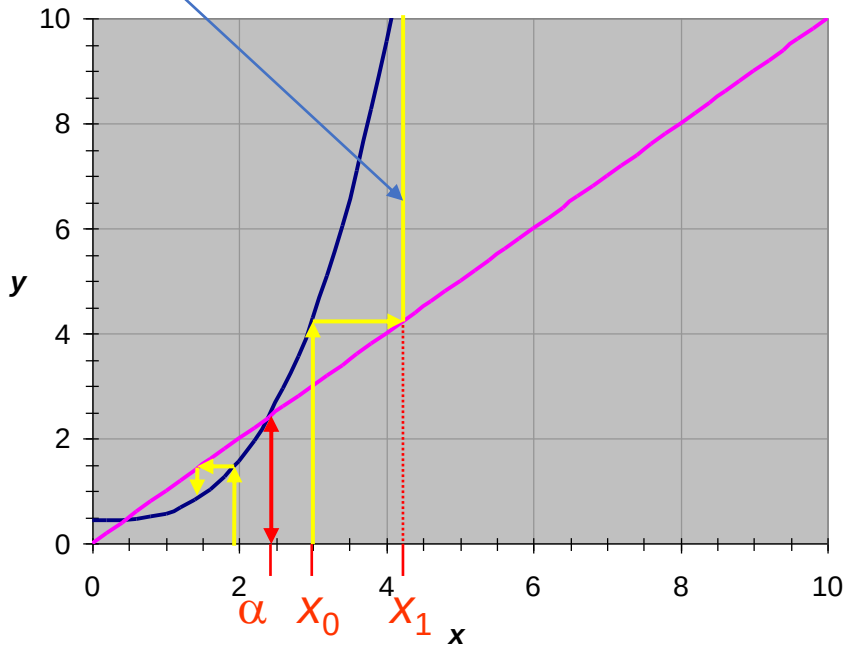
α = **0.441** (με 3 σημαντικά ψηφία)

απόκλιση

Για $x_0 = 3$ η διαδικασία αποκλίνει από την άνω ρίζα x=2.4, διότι g'(α) > 1.

Η α=2.4 είναι έξω από το διάστημα -1.52<x<1.52

n	x_n
0	3
1	4.28571
2	11.6739
3	227.702
4	1686559
5	6.9E+17



Υπενθυμίζεται ότι η f(x) έχει τρείς ρίζες (-2.9, 0.441, 2.4)

x	g(x)			
2	1.71429			
2.1	1.89000			
2.2	2.07429			
2.3	2.26714			
2.4	2.46857	η τιμή της g(x) γίνεται >x		
2.5	2.67857			
2.6	2.89714			
2.7	3.12429			
2.8	3.36000			
2.9	3.60429			
3	3.85714			

$$x_{n+1} = \frac{x_n^{\,3} + 3}{7}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Παράδειγμα:

(Ρίζες: -1 και 2)

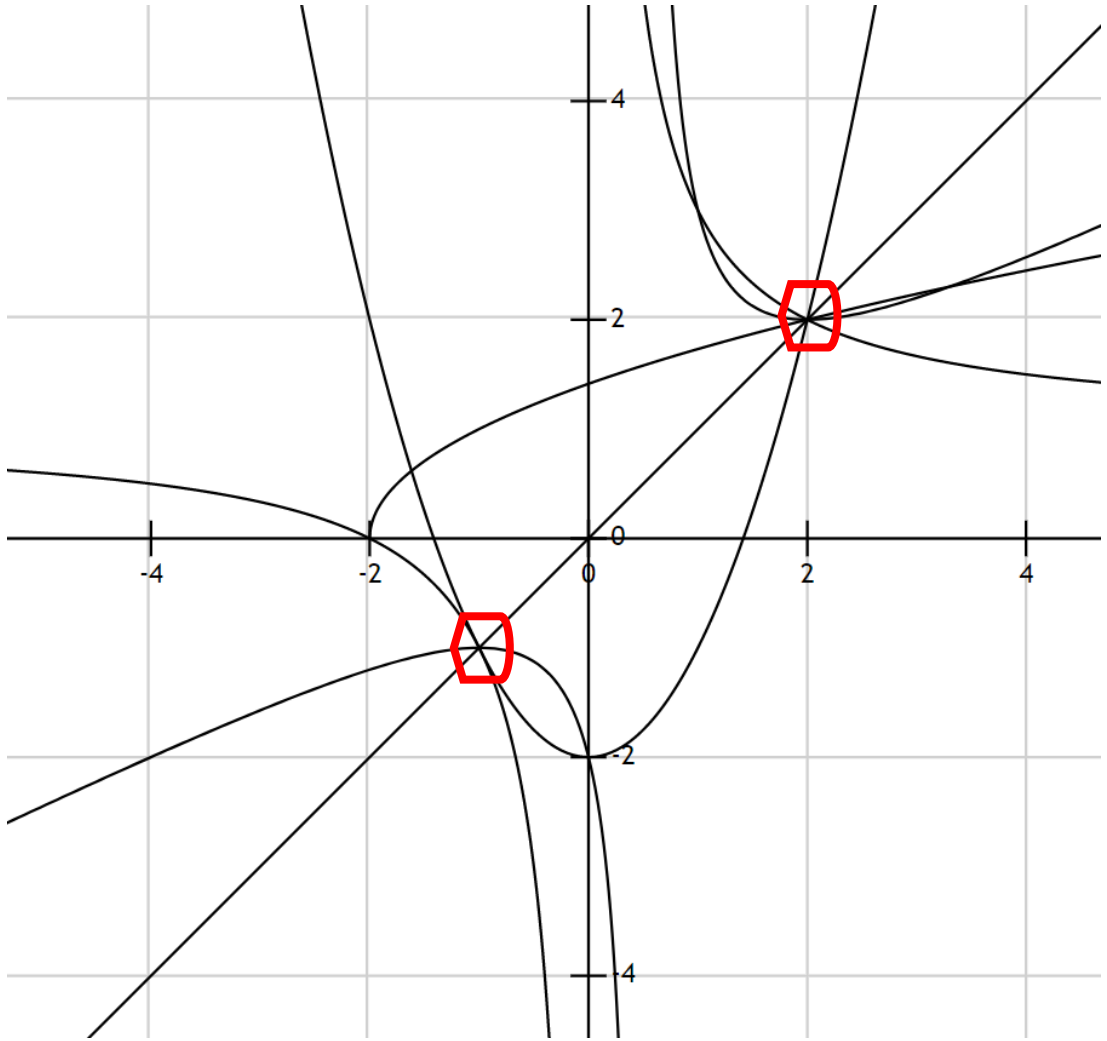
$$f(x) = x^2 - x - 2, \qquad x > 0$$

- $g(x) = x^2 - 2$
- $g(x) = \sqrt{x+2}$
- $g(x) = 1 + 2/x$
- $g(x) = \dfrac{x^2+2}{2x-1}$

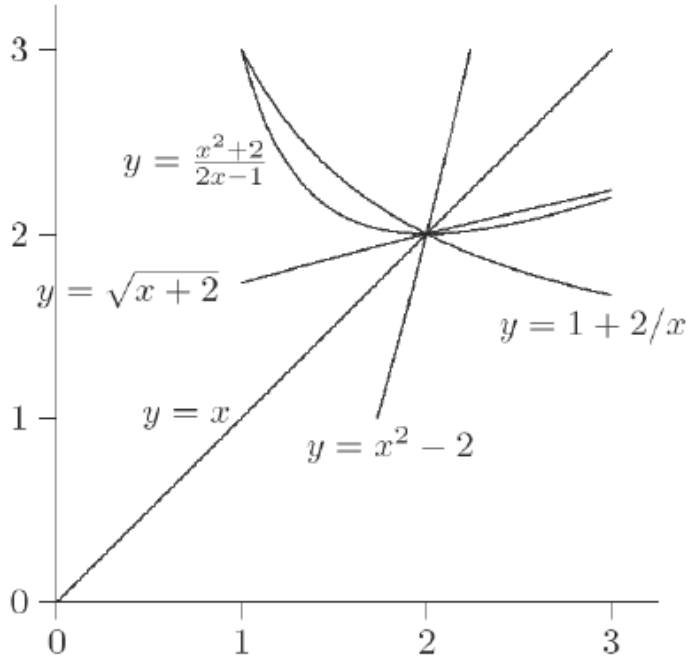
4 διαφορετικές συναρτήσεις

Και οι 4 g(x) τέμνονται με την x στην ρίζα 2.
Όμως, τι γίνεται με τις παραγώγους τους?

- Για την ακρίβεια, και οι 4 συναρτήσεις τέμνονται **και στις δύο** ρίζες:



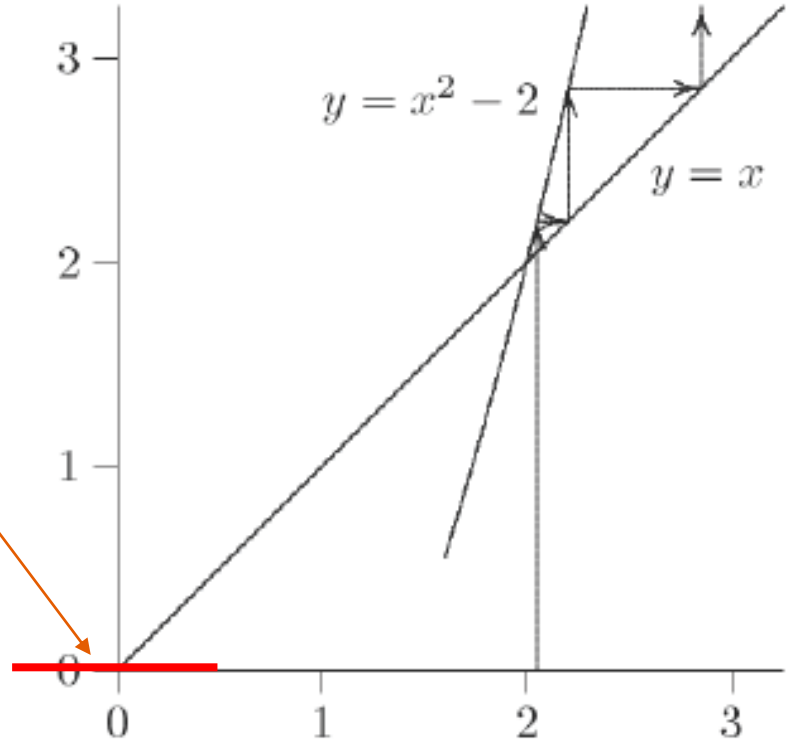
(Ρίζες: -1 και 2)



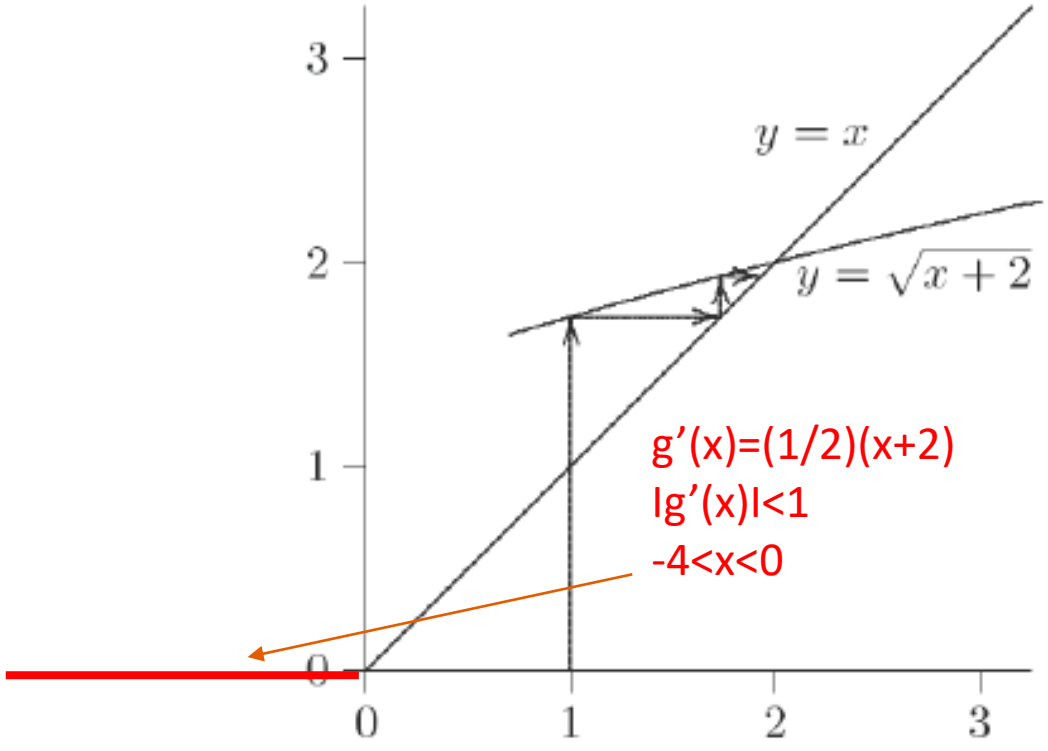
Και οι 4 g(x) τέμνονται με την x στην ρίζα 2.
Όμως, τι γίνεται με τις παραγώγους τους?

Οι δύο πρώτες …

g’(x)=2x
Ig’(x)I<1
-0.5<x<0.5



Αποκλίνει, αφού και η ρίζα, και η αρχική τιμή είναι έξω από το διάστημα

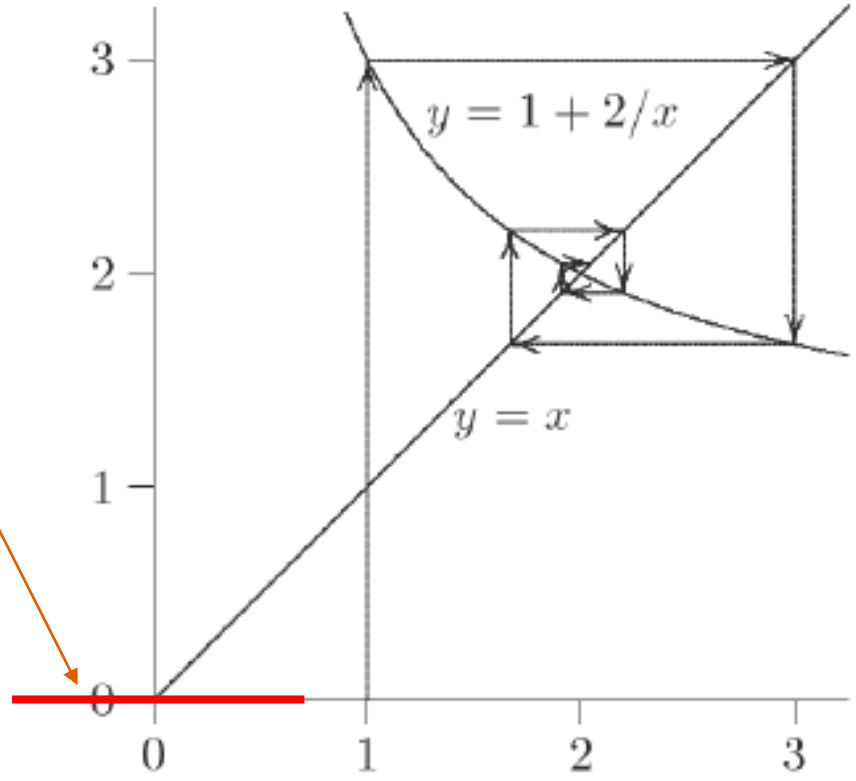


g’(x)=(1/2)(x+2)
Ig’(x)I<1
-4<x<0

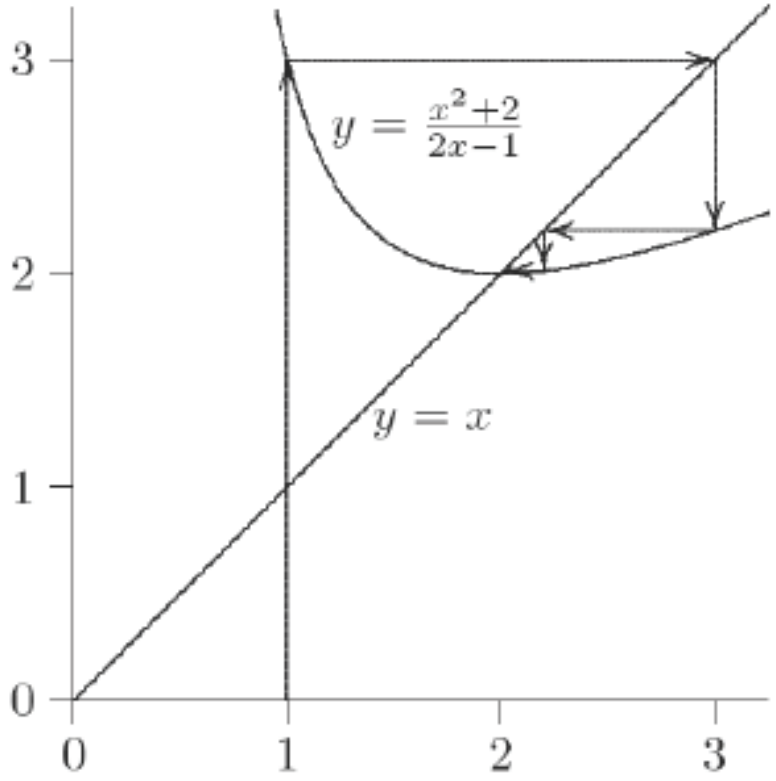
Συγκλίνει, παρόλο που και η ρίζα, και η αρχική τιμή είναι έξω από το διάστημα. Ωστόσο, εάν η αρχική τιμή ήταν >2, δεν θα σύγκλινε…

… και οι δύο επόμενες …

$g'(x)=-2x^{-2}$
$|g'(x)|<1$
$-0.7<x<0.7$



Συγκλίνει, παρόλο που και η ρίζα, και η αρχική τιμή είναι έξω από το διάστημα.



Συγκλίνει.

Ασκηση: Για την εύρεση ρίζας της εξίσωσης

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

χρησιμοποιείστε μία από τις παρακάτω συναρτησιακές επαναλήψεις:

(a) $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

(b) $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$

(c) $x = g_3(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}$

(d) $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4 + x}\right)^{1/2}$

(e) $x = g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

Πραγματοποιήστε 3 προσεγγίσεις, υπολογίζοντας κάθε φορά και το σχετικό προσεγγιστικό σφάλμα:

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| 100\%$$

Αποτελέσματα άσκησης:

n	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	−0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365262015
3	−469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.365230576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

αποκλίνουν

Συγκλίνουν οι τρείς από τις πέντε συναρτήσεις και μάλιστα σχετικά γρήγορα (η μέθοδος διχοτόμησης που θα δούμε αργότερα χρειάζεται 27 προσεγγίσεις)

Ασκηση: $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

- Βρείτε ρίζα για αρχική τιμή *x=1.0* και *x=2.0*
- Δύο συναρτήσεις:

$$x = g(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}$$

  - Ξεκινώντας από x=1, x=0.292893 στην 15η προσέγγιση
  - Ξεκινώντας από x=2, αποκλίνει
  - Γιατί? Συσχετίστε το *g'(x)=x*. Για σύγκλιση *g'(x) < 1*

$$x = g(x) = \sqrt{2x - \tfrac{1}{2}}$$

  - Ξεκινώντας από x=1, x=1.707 στην 19η προσέγγιση
  - Ξεκινώντας από, x=1.707 στην 12η προσέγγιση
  - Γιατί? Συσχετίστε το με $g'(x) = \left(2x - \tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

- ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ ΚΑΤΆ AITKEN

Διαδικασία επιτάχυνσης προσεγγιστικής κατά Aitken

Αποδεικνύεται ότι μια άλλη προσεγγιστική διαδικασία, η οποία επιταχύνει την σύγκλιση, προκύπτει από τη σχέση:

$$x_i^* = \frac{x_i x_{i+2} - x_{i+1}^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}$$

Αυτό μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$x^*_i = G(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}).$$

Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ο εξής αλγόριθμος :

Επιλέγεται μια αρχική τιμή x_0 και υπολογίζονται τα x_1 και x_2 από τις σχέσεις $x_1 = g(x_0)$ και $x_2 = g(x_1)$. Στη συνέχεια το x_0 βελτιώνεται από τη σχέση $x^*_0 = G(x_0, x_1, x_2)$.

Στο επόμενο βήμα, $x_1 = g(x^*_0)$, $x_2 = g(x_1)$ και $x^*_0 = G(x_0, x_1, x_2)$,

Κάθε 3η προσέγγιση ($6^η$, $9^η$, κλπ) από την εξίσωση

Παράδειγμα επιτάχυνσης διαδικασίας συναρτησιακών επαναλήψεων κατά Aitken

$$x=\sin x+0.25$$

i	xi	σφάλμα	μικρότερο από	m-n+1	m	n = σωστά ψηφία		1.69897
0	1.5					(τουλάχιστον)		-0.30103
1	1.556720935	0.03644	0.5*10^(-1)	-1	0	2	0.26	
2	2	0.22164	0.5*10^(0)	0	0	1	1.04	
3	1.53790188	-0.30047	0.5*10^(0)	0	0	1	1.18	
4	3	0.48737	0.5*10^(0)	0	0	1	1.39	
5	1.426040783	-1.10373	0.5*10^(1)	1	0	0	1.74	
6	4	0.64349	0.5*10^(1)	1	0	0	1.51	
7	1.290964511	-2.09846	0.5*10^(1)	1	0	0	2.02	
8	5	0.74181	0.5*10^(1)	1	0	0	1.57	
9	1.15880174	-3.31480	0.5*10^(1)	1	0	0	2.22	
10	1.531226068	0.24322	0.5*10^(0)	0	0	1	1.08	
11	1.557059898	0.0165914	0.5*10^(-1)	-1	0	2	-0.08	
12	1.557145598	0.0000550	0.5*10^(-3)	-3	0	4	-2.56	
13	1.557145599	0.000000001	0.5*10^(8)	-8	0	9	-7.53	

Από τρία διαδοχικά βήματα προκύπτει το 4ο
0,1,2 οδηγούν στο 3,
3,4,5 οδηγούν στο 6 κλπ

Η μέθοδος κατά Aitken βρίσκει ακρίβεια 10 σημαντικών ψηφίων στην 9η επανάληψη, ενώ η απλή μέθοδος συναρτησιακών επαναλήψεων στην 20η

Ασκηση: $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

- Βρείτε ρίζα για αρχική τιμή x_0*=1.0* και x_0*=2.0*
- Δύο συναρτήσεις:

$$x = g(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}$$

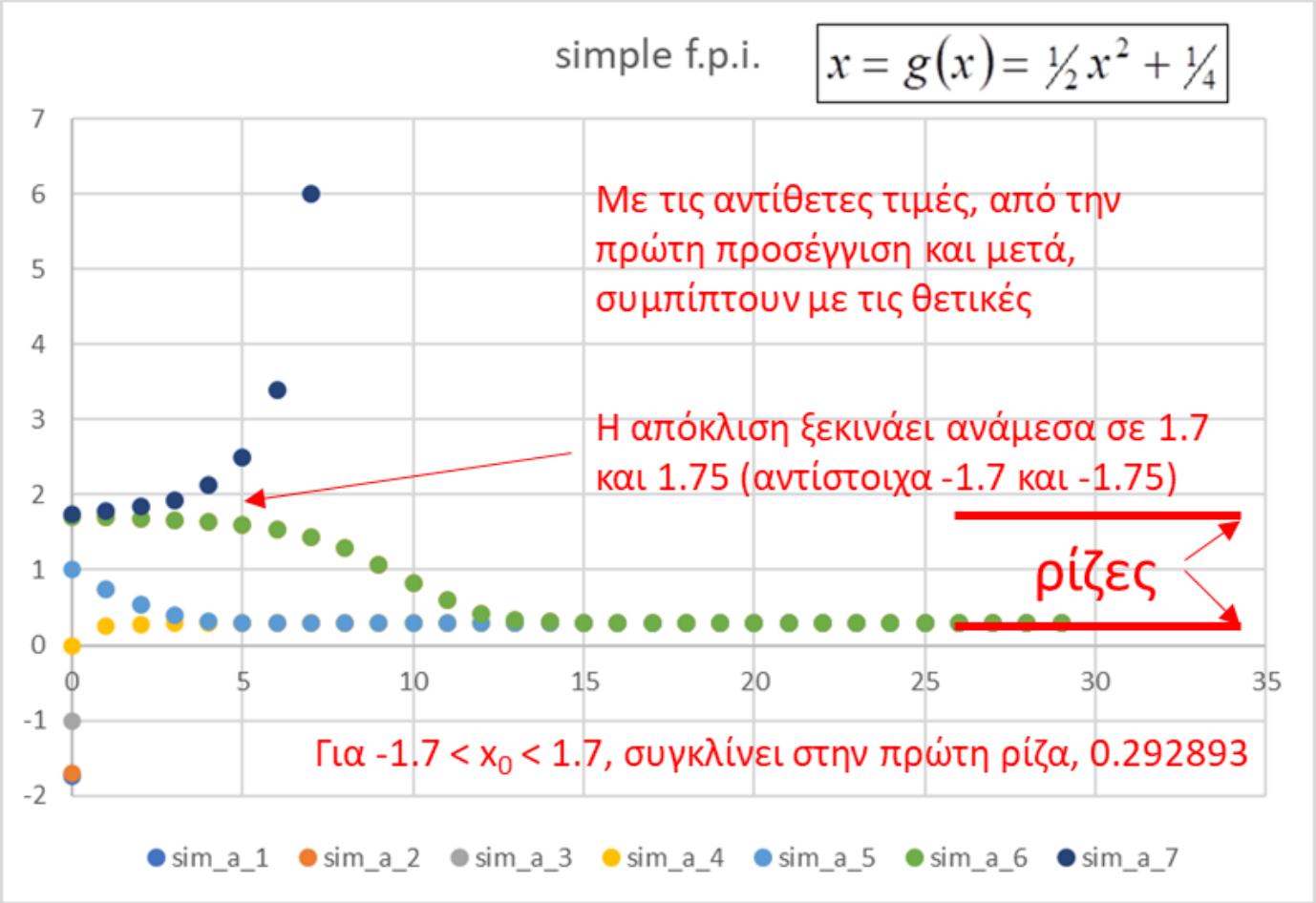
  - Ξεκινώντας από x_0=1, x=0.292893 στην 15η προσέγγιση
  - Ξεκινώντας από x_0=2, αποκλίνει
  - Γιατί? Συσχετίστε το *g'(x)=x*. Για σύγκλιση *g'(x) < 1*

$$x = g(x) = \sqrt{2x - \tfrac{1}{2}}$$

  - Ξεκινώντας από x_0=1, x=1.707 στην 19η προσέγγιση
  - Ξεκινώντας από, x_0=2, x=1.707 στην 12η προσέγγιση
  - Γιατί? Συσχετίστε το με $g'(x) = \left(2x - \tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Ασκηση: $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

- Βρείτε ρίζα για διάφορες αρχικές τιμές
- συνάρτηση: $x = g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$
  - Ξεκινώντας από x=1, x=0.292893 στην 15η προσέγγιση
  - Ξεκινώντας από x=2, αποκλίνει
  - Γιατί? Συσχετίστε το *g'(x)=x*. Για σύγκλιση *g'(x) < 1*



Απλή διαδικασία επαναλήψεων

Αρχικές τιμές -1.75, -1.7, -1, 0, 1, 1.7, 1.75

Σύγκλιση για -1.7, -1, 0, 1, 1.7 στην πρώτη ρίζα, η οποία είναι και η μόνη στο διάστημα:

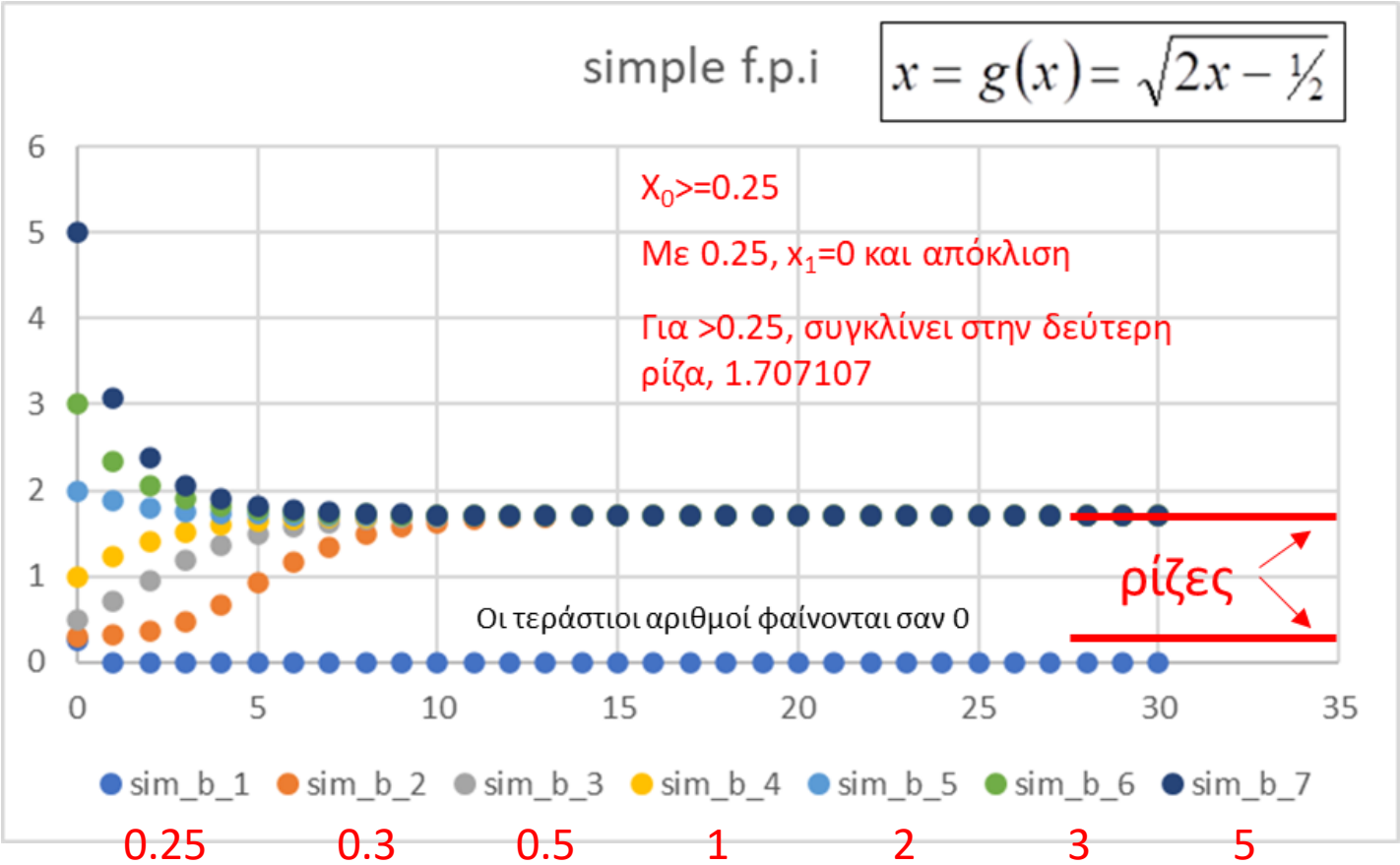
Διάστημα όπου $|g'(x)| < 1$: $-1 < x < 1$

Ασκηση: $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

- Βρείτε ρίζα για διάφορες αρχικές τιμές
- συνάρτηση: $x = g(x) = \sqrt{2x - \frac{1}{2}}$
  - Αποκλίνει για x=0.25, συγκλίνει για x > 0.3
  - Γιατί? Συσχετίστε το με το

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - {}^{1}/_{2}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x - {}^{1}/_{2}}} < 1 \Rightarrow \sqrt{2x - {}^{1}/_{2}} > 1 \Rightarrow x > {}^{3}/_{4}$$



Απλή διαδικασία επαναλήψεων

Αρχικές τιμές 0.25, 0.3, 0.5, 1, 2, 3, 5

Σύγκλιση για 0.3, 0.5, 1, 2, 3, 5 στη δεύτερη ρίζα

Διάστημα όπου I*g'(x)*I > *3/4:* *x>3/4*

Διαδικασία λήψης του μέσου όρου σε περίπτωση που η καινούργια τιμή είναι έξω από το διάστημα (με την διαδικασία αυτή, παραμένει στο διάστημα, και επομένως συγκλίνει, σε κάποιες περιπτώσεις με αργότερο ρυθμό):

$$x_{i+1} = g(x) = {}^{1}/_{2}\, x_i^2 \quad + {}^{1}/_{4} \longrightarrow$$ 0.5*B7^2+0.25

Microsoft Excel Worksheet

$$x_{i+1} = \begin{cases} g(x_i), & \text{αν } g(x_i) \in I \\ \dfrac{x_i + g(x_i)}{2}, & \text{αν } g(x_i) \notin I \end{cases}$$

Εάν ναι, B8=0.5*B7^2+0.25

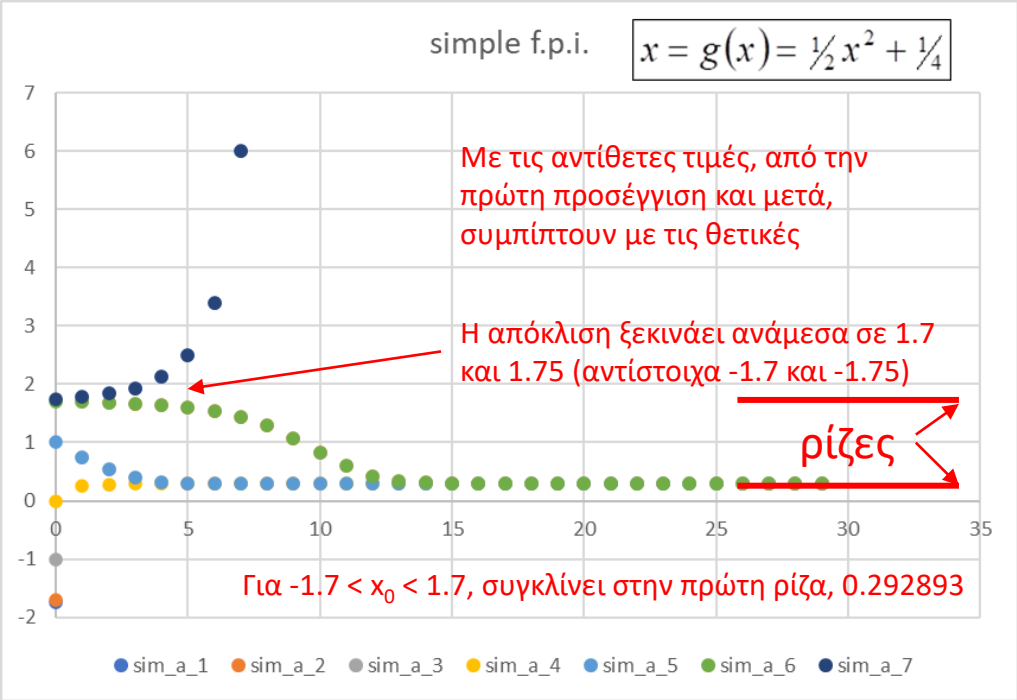
Εάν όχι, B8=((0.5*B7^2+0.25)+B7)/2

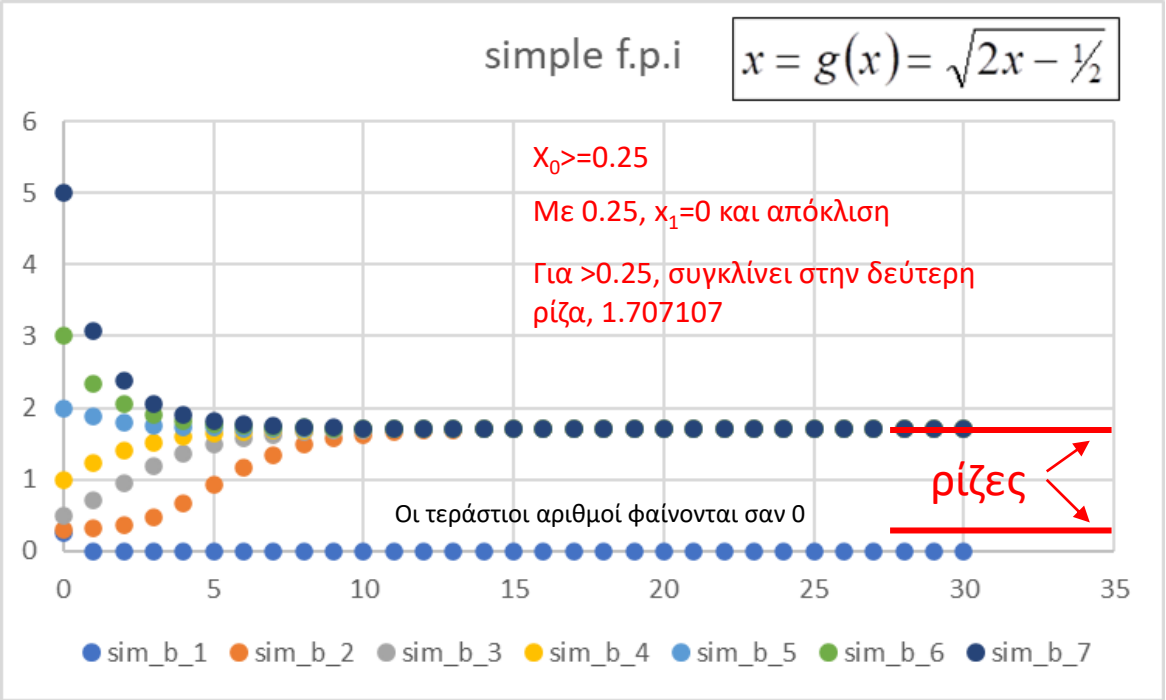
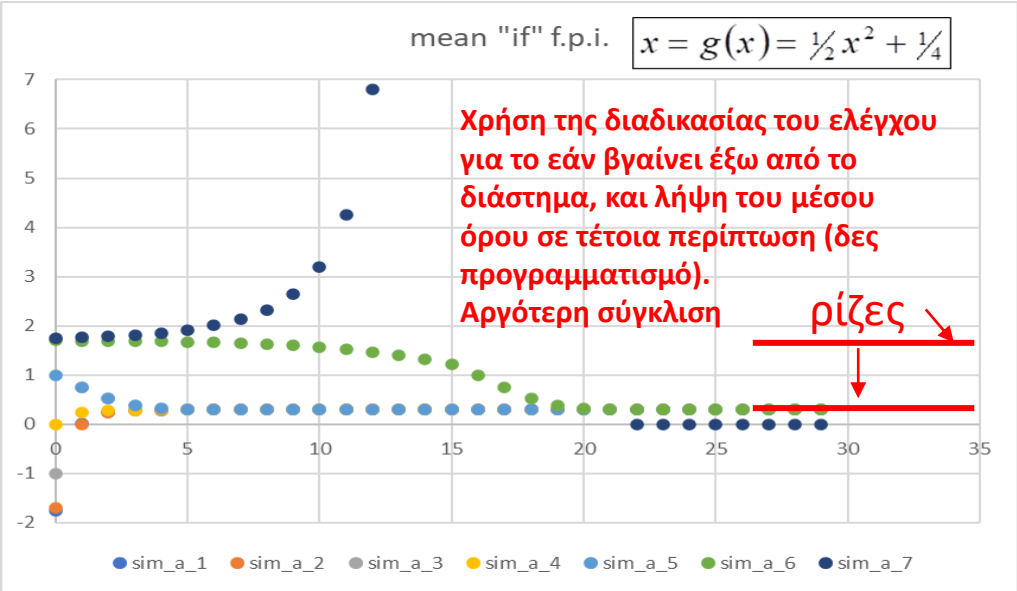
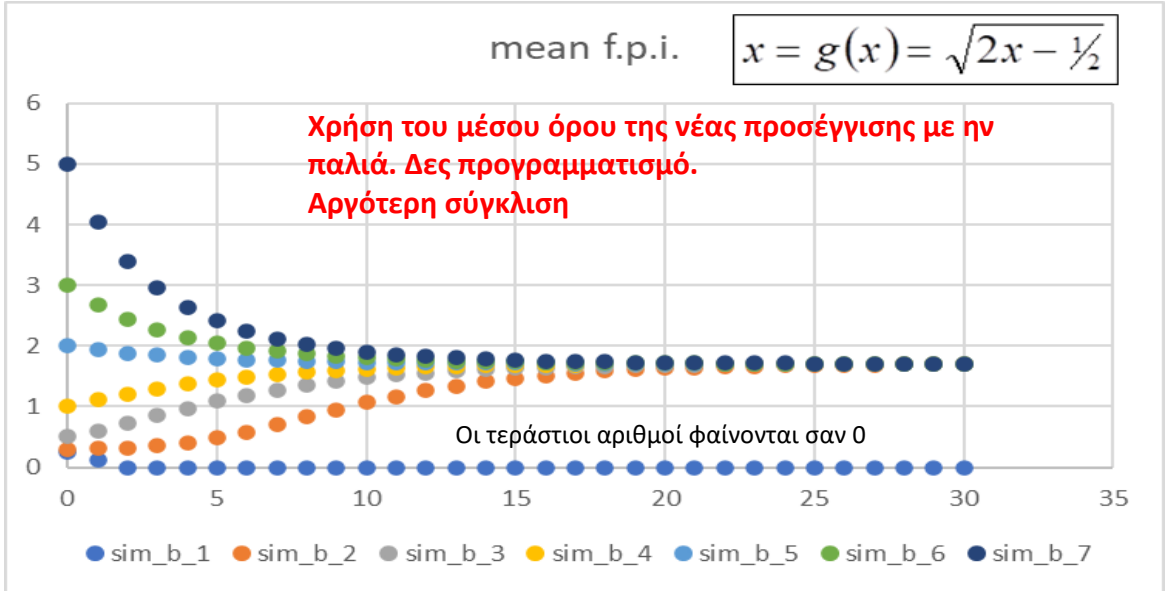
Έλεγχος εάν $|x_{i+1}| < 1.$

iter	sim_a_1
0	-1.75
1	0.015625
2	0.250122
3	0.281281
4	0.289559

sim_a_1
-1.75
=IF(ABS(0.5*B7^2+0.25)<1;0.5*B7^2+0.25;(0.5*B7^2+0.25+B7)/2)
=IF(ABS(0.5*B8^2+0.25)<1;0.5*B8^2+0.25;(0.5*B8^2+0.25+B8)/2)
=IF(ABS(0.5*B9^2+0.25)<1;0.5*B9^2+0.25;(0.5*B9^2+0.25+B9)/2)
=IF(ABS(0.5*B10^2+0.25)<1;0.5*B10^2+0.25;(0.5*B10^2+0.25+B10)/2)
=IF(ABS(0.5*B11^2+0.25)<1;0.5*B11^2+0.25;(0.5*B11^2+0.25+B11)/2)

Επίλυση της ίδιας εξίσωσης, με δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Σύγκλιση προς διαφορετικές ρίζες, σε σχέση με την τιμή της g’(x)





Επάνω: απλή διαδικασία. Κάτω: με έλεγχο. Ιδια αποτελέσματα, με αργότερη σύγκλιση κάτω