Εφαρμοσμένη Υδραυλική

Γ. Παπαευαγγέλου

Τμήμα Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, ΑΠΘ

Εισαγωγή

- Ρευστομηχανική = Μηχανικές ιδιότητες των ρευστών (υγρών και αερίων)
- Υδρομηχανική = Υδροστατική + Υδροδυναμική
- Υδραυλική = η εφαρμοσμένη Υδρομηχανική
- Εφαρμογές: Υδρεύσεις – Αρδεύσεις – Μηχανολογία
- Αναλυτική και εμπειρική επιστήμη

Γενικό περίγραμμα μαθήματος

- Βασικές ιδιότητες των ρευστών
- Βασικές θεωρητικές αρχές της Υδραυλικής
- Υδροστατική
- Υδροδυναμική

Περίγραμμα μαθήματος (1/3)

- Μαθηματικό υπόβαθρο της Μηχανικής των Ρευστών (Κινηματική, παραμορφώσεις, διατήρηση της μάζας, Τάσεις, εξισώσεις κίνησης, καταστατικές εξισώσεις, διατήρηση της ενέργειας)
- Υδροστατική
  - Υδροστατική πίεση
  - Δυνάμεις σε επίπεδες επιφάνειες
  - Δυνάμεις σε καμπύλες επιφάνειες

Περίγραμμα μαθήματος (2/3)

- Μέτρηση παροχής σε ανοικτούς και κλειστούς αγωγούς
- Εφαρμογές της αρχής διατήρησης της γραμμικής ορμής
- Στρωτή και τυρβώδης ροή – Θεωρία της οριακής στιβάδας
  - Στρωτή και τυρβώδης ροή
  - Μήκος αναμίξεως – κατανομή ταχύτητας
  - Αριθμός Reynolds

Περίγραμμα μαθήματος (3/3)

Κλειστοί αγωγοί

- Στρωτή και τυρβώδης ροή
- Κατανομή της ταχύτητας στους κλειστούς αγωγούς
- Απώλειες ενέργειας
- Υπολογισμός του συντελεστή τριβής f
- Τοπικές απώλειες
- Επίλυση δικτύων διανομής νερού
- Ροή κάτω από συνθήκες μεταβλητού φορτίου

Σήμερα:

- Περίγραμμα μαθήματος
- Εισαγωγή
- Βασικές ιδιότητες των ρευστών
- Βασικές θεωρητικές αρχές μαθήματος

Βασικές ιδιότητες των ρευστών

Εισαγωγή στην Υδραυλική – Αντικείμενο

Πυκνότητα και ειδικό βάρος σωμάτων

Συστήματα μονάδων

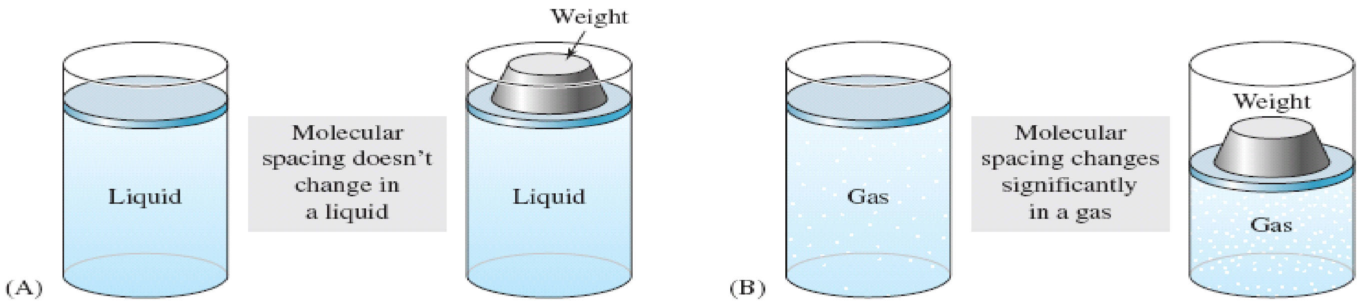
Ιξώδες ρευστού, επιφανειακή τάση, τριχοειδή φαινόμενα

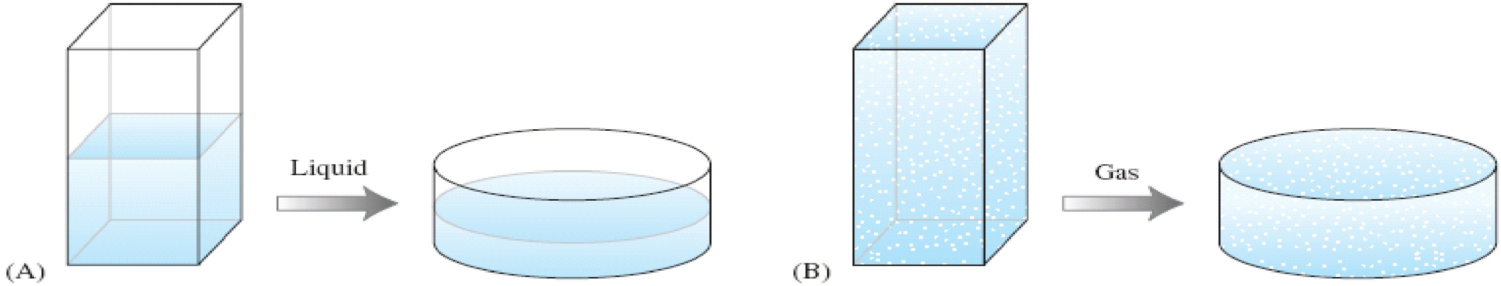
Υδροστατική πίεση

Εισαγωγή – Διάκριση των ρευστών

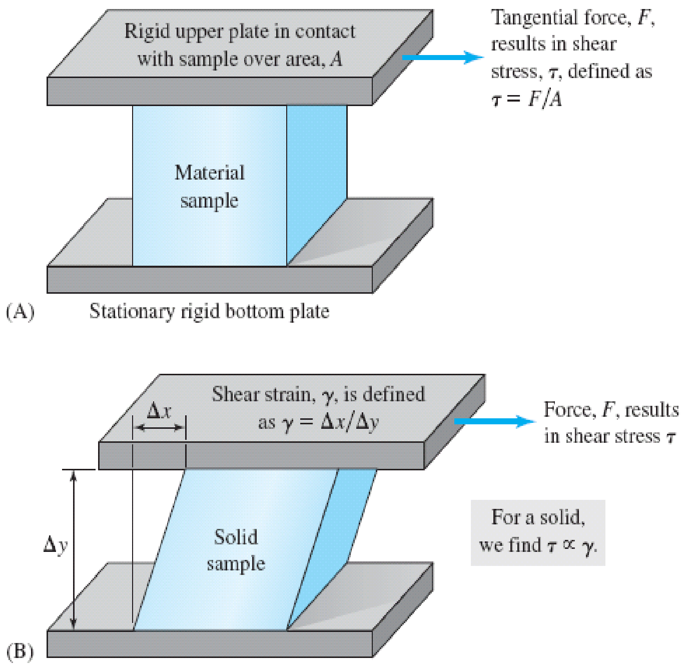
- Ρευστά = μεταβάλλουν τις σχετικές θέσεις των όγκων των στοιχείων τους (μή στατική ισορροπία σε διάτμηση)
- Αέρια = συμπιεστά (μεταβολή ρ με P)
- Στερεά = ελαστική παραμόρφωση σε διάτμηση
- Ρευστά = συνεχής και μόνιμη παραμόρφωση σε διάτμηση
- Ιδανικό ρευστό = μηδενικές δυνάμεις τριβής μεταξύ των μορίων ή απείρως μικρή ΔF, μετακινεί όγκο ΔV

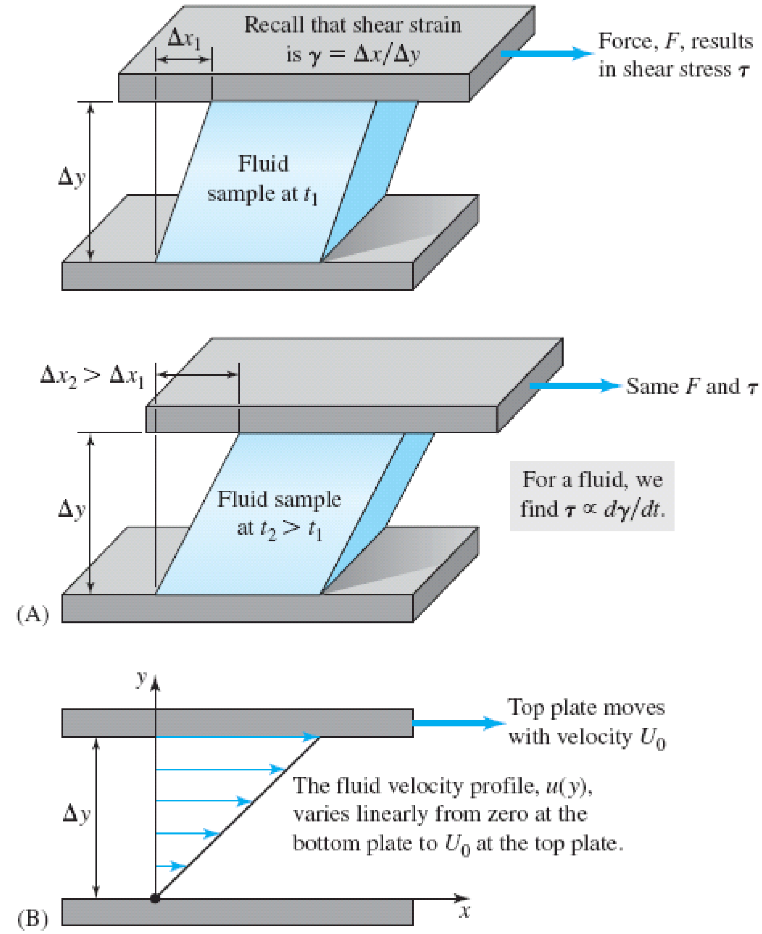
Διάκριση των ρευστών από τα αέρια





Διάκριση των ρευστών από τα στερεά





Στερεά – Υγρά - Αέρια

Διαφορές ως προς τις σχετικές μοριακές θέσεις και αλληλεπιδράσεις, δυνατότητα ελεύθερης επιφάνειας και αποδοχή τάσεων, συμπιεστότητα, ανταπόκριση σε διατμητική τάση.

		ρευστά	
χαρακτηριστικό	**στερεά**	**υγρά**	**αέρια**
Απόκριση σε διατμητική τάση, τ	τ=Gγ (ανθίσταται στην παραμόρφωση)	τ=μ(dU/dy) – ανθίστανται στον ρυθμό παραμόρφωσης	
Απόσταση μεταξύ γειτονικών μορίων	ελάχιστη	μικρή	μεγάλη
Μοριακή διευθέτηση	ταξινομημένη	Τάξη μικρών αποστάσεων μόνο	Τυχαία
Ενταση μοριακών αλληλεπιδράσεων	δυνατή	μεσαία	αδύνατη
προσαρμογή στο σχήμα του δοχείου	οχι	ναι	ναι
επέκταση χωρίς όρια	οχι	οχι	ναι
Ελεύθερη επιφάνεια	ναι	ναι	Οχι
Αντίσταση σε μικρή τάση	ναι	Θεωρητικά ναι, πρακτικά όχι	οχι
συμπιεστότητα	Ουσιαστικά μηδέν	Σχεδόν ασυμπίεστα	Ιδιαίτερα συμπιεστά

Πυκνότητα – ειδικό βάρος

$$\rho = \frac{\gamma}{g}$$

ρ = μάζα / όγκο ($kg \cdot m^{-3}$)

$\rho_{\text{νερού}} = 1000\ kg/m^3$ στους 4^oC

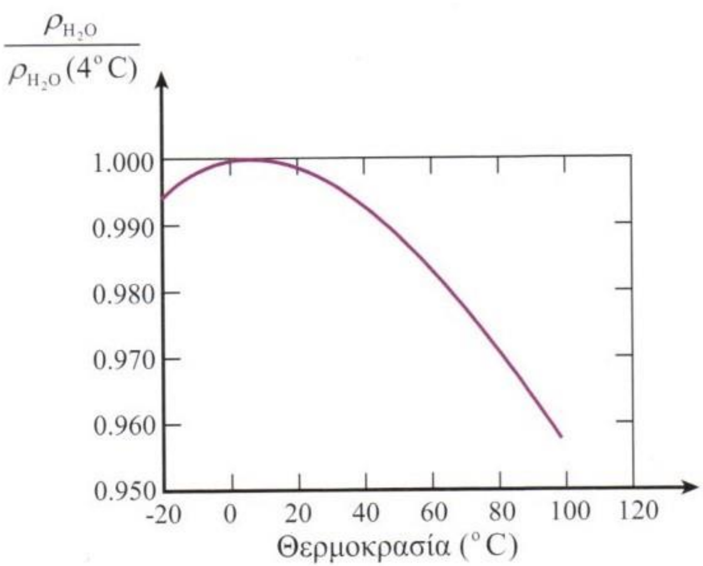
γ = ειδικό βάρος ($kg \cdot m^{-3} \cdot m \cdot s^{-2} = N \cdot m^{-3}$)

(ή ειδική βαρύτητα (specific gravity) =
βάρος σώματος / βάρος ίσου όγκου νερού)

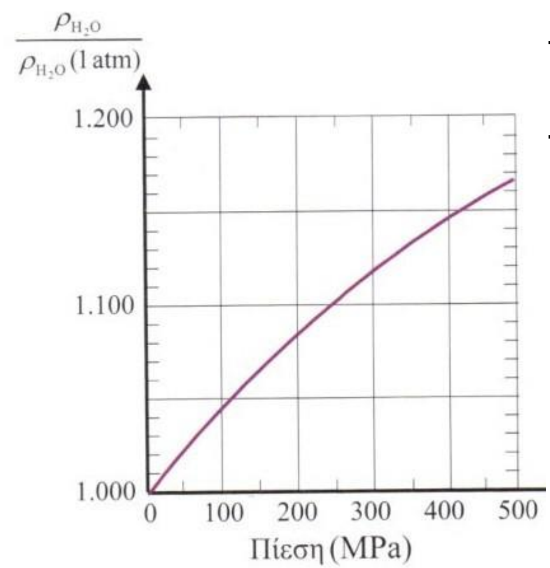
Συστήματα μονάδων FLS, CGS, MKSA, SI

Πυκνότητα νερού και αέρα με την θερμοκρασία

Temperature (°C)		0	10	15	20	40	60	80	100
ρ (kg/m^3)	Water	999.8	999.7	999.1	998.2	992.2	983.2	971.8	958.4
	Air	1.293	1.247	1.226	1.205	1.128	1.060	1.000	0.9464



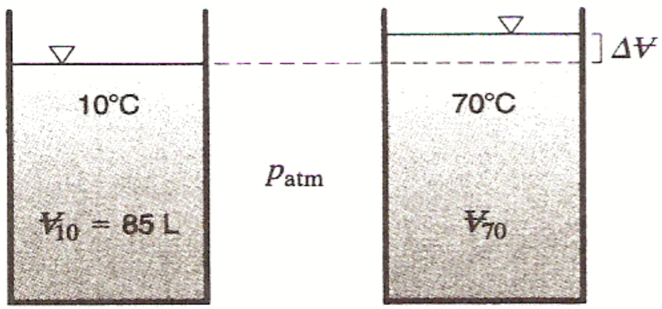
Σχήμα 1.4 Σχετική πυκνότητα του νερού. Η πυκνότητα νερού σε θερμοκρασία 4°C ισούται με 1000kg/m³. Προσαρμογή από Fox, R. W. and McDonald A.T., "Introduction to Fluid Mechanics", 4th ed. Wiley, New York, 1992.



Σχήμα 1.5 Πυκνότητα του νερού υπ πολύ μεγάλη πίεση (T = 0°C). Προσαρμ γή από R. H. Sabersky, A.J. Acosta, E. Hauptmann, E.M. Gates, "Fluid Flow 4th ed., Prentice Hall, New Jersey, 199

πηγή: Λιακόπουλος Α., «Υδραυλική», Εκδόσεις Τζιόλα, 2020)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4 Ενα δοχείο περιέχει 85 L νερού σε θερμοκρασία 10 °C και ατμοσφαιρική πίεση. Αν θερμανθεί το νερό στους 70 °C, πόσο τοις % θα μεταβληθεί ο όγκος του; Πόσο βάρος νερού πρέπει να αφαιρεθεί ώστε ο όγκος να διατηρήσει την αρχική του τιμή; Να χρησιμοποιηθεί το Παράρτημα Α.



Λύση

Ογκος , $V_{10} = 85 \text{ L} = 0.085 \text{ m}^3$
Πίνακας Α.1: $\gamma_{10} = 9.804 \text{ kN/m}^3$, $\gamma_{70} = 9.598 \text{ kN/m}^3$

Βάρος νερού, $W = \gamma V = \gamma_{10} V_{10} = \gamma_{70} V_{70}$ Το βάρος της ποσότητας νερού δεν θα αλλάξει…

δηλαδή $9.804(0.085) \text{ kN} = 9.589 V_{70} \rightarrow V_{70} = 0.08691 \text{ m}^3$

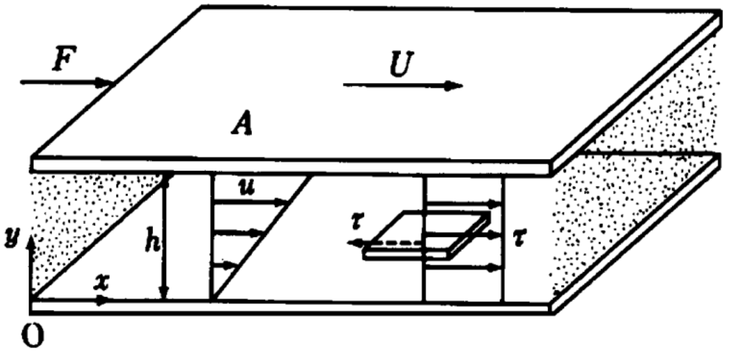
$\Delta V = V_{70} - V_{10} = 0.08691 - 0.08500 = 0.001\,906 \text{ m}^3$ στο γ_{70}

$\Delta V / V_{10} = 0.001\,906/0.085 = 2.24\%$ αύξηση

Θα πρέπει να αφαιρεθεί νερό βάρους (στο γ_{70}): $W\left(\dfrac{\Delta V}{V_{70}}\right) = \gamma_{70} \Delta V$

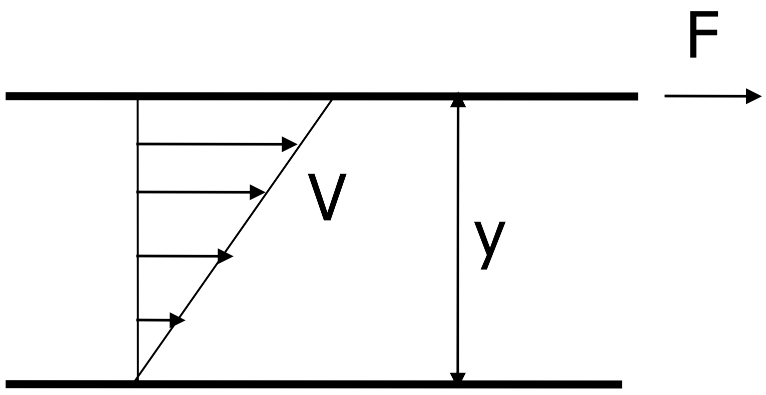
$= (9589 \text{ N/m}^3)(0.001\,906 \text{ m}^3) = 18.27 \text{ N}$

ιξώδες



Βαθμός αντίστασης σε διάτμηση

$$\frac{F}{A} = \tau \approx \frac{dV}{dy}$$



Δυναμικό ιξώδες μ: $\tau = \mu \frac{dV}{dy} = \mu \cdot \dot{\gamma}$ (1N*s/m^2=1Pa*s)

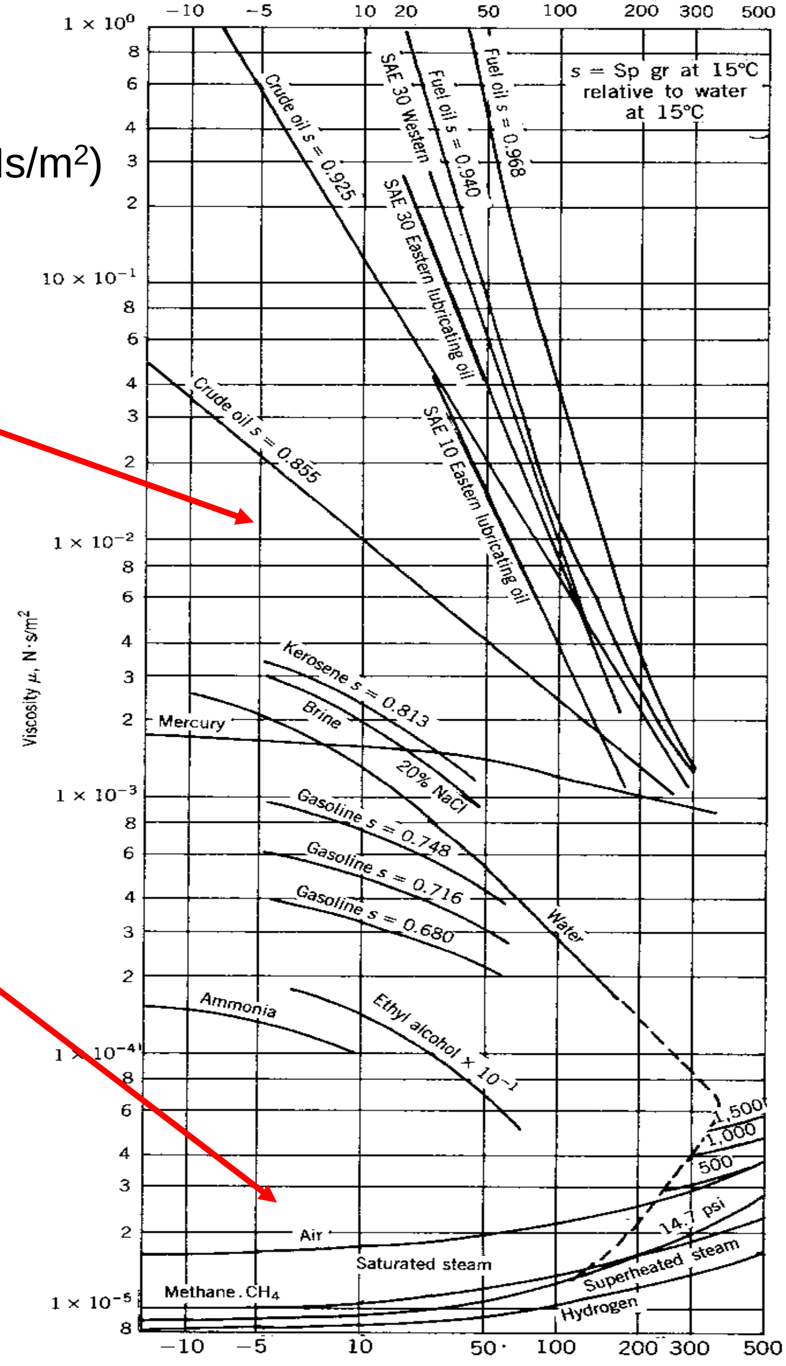
Κινηματικό ιξώδες: $v = \frac{\mu}{\rho}$ (1m^2/s)

Ιξώδες διαφορετικών ρευστών σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία

Στα υγρά, οι ιξώδεις δυνάμεις προκαλούνται γενικά από ελκτικές μοριακές δυνάμεις στα στρώματα της ροής. Η αύξηση της θερμοκρασίας προξενεί **μείωση** του ιξώδους διότι αύξηση της θερμοκρασίας σημαίνει μεγαλύτερη θερμική ενέργεια των σωματιδίων με την οποία ξεπερνούν τις ελκτικές τους δυνάμεις.

Στα αέρια, το ιξώδες **αυξάνεται** με τη θερμοκρασία από την δύναμη τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ των στρωμάτων ροής. Η θερμική αύξηση της κινητικότητας προκαλεί αύξηση του ιξώδους.

μ (Ns/m^2)



μονάδες βασικών μεγεθών στο SI

Δύναμη → $1N = 1 kg \cdot m \cdot s^{-2}$

Πίεση → $1 Pa = 1 N \cdot m^{-2}$

$1 Torr = 1 mmHg = 13.6 mmH_2O$

$1 Atm = 760 Torr = 101325 Pa = 1 kp \cdot cm^{-2}$

$1 bar = 10^5 Pa = 10^3 mbar = 750.1 Torr$

Ιξώδες, μ → $1 Pa \cdot s = 1 kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} = 1000 mPas$

$1 Poise = 1 P = 100 cPoise = 100 mPas = 0.1 Pas$

ν → $1 m^2 \cdot s^{-1} = 10^4 St = 10^6 cSt$

Φυσικές Ιδιότητες του νερού σε πίεση 1Atm

(πηγή: Λιακόπουλος Α., «Υδραυλική», Εκδόσεις Τζιόλα, 2020)

Θερμο-κρασία	Ειδικό βάρος	Πυκνό-τητα	Συντε-λεστής δυναμικού ιξώδους	Συντελε-στής κινη-ματικού ιξώδους	Ταχύτητα ήχου	Τάση ατμών (απολ.)	Ύψος τάσης ατμών (απολ.)	Μέτρο ελαστικό-τητας όγκου
T	γ	ρ	μ	ν	c	$p_υ$	$p_υ/γ$	$E_υ$
°C	kN/m³	kg/m³	N·s/m²	10^{-6}m²/s	(m/s)	kN/m²	m	10^6kN/m²
0 °C	9.805	999.8	0.001781	1.785	1403	0.611	0.0623	2.02
5 °C	9.807	1000.0	0.001518	1.519	1427	0.872	0.0889	2.06
10 °C	9.804	999.7	0.001307	1.306	1447	1.230	0.1255	2.10
15 °C	9.798	999.1	0.001139	1.139	1466	1.710	0.1745	2.14
20 °C	9.789	998.2	0.001002	1.003	1481	2.34	0.239	2.18
25 °C	9.777	997.0	0.000890	0.893	1495	3.17	0.324	2.22
30 °C	9.765	995.7	0.000798	0.800	1507	4.24	0.434	2.25
40 °C	9.731	992.2	0.000653	0.658	1526	7.38	0.758	2.28
50 °C	9.690	988.0	0.000547	0.553	1541	12.33	1.272	2.29
60 °C	9.642	983.2	0.000466	0.474	1552	19.92	2.07	2.28
70 °C	9.589	977.8	0.000404	0.413	1555	31.16	3.25	2.25
80 °C	9.530	971.8	0.000354	0.364	1555	47.34	4.97	2.20
90 °C	9.467	965.3	0.000315	0.326	1550	70.10	7.40	2.14
100 °C	9.399	958.4	0.000282	0.294	1543	101.33	10.78	2.07

Πηγές: Finnemore and Franzini, 10th edition, McGraw Hill, 2001, και Henry Liu, "Pipeline Engineering", Lewis Publishers, 2003.

Φυσικές Ιδιότητες του θαλασσινού νερού

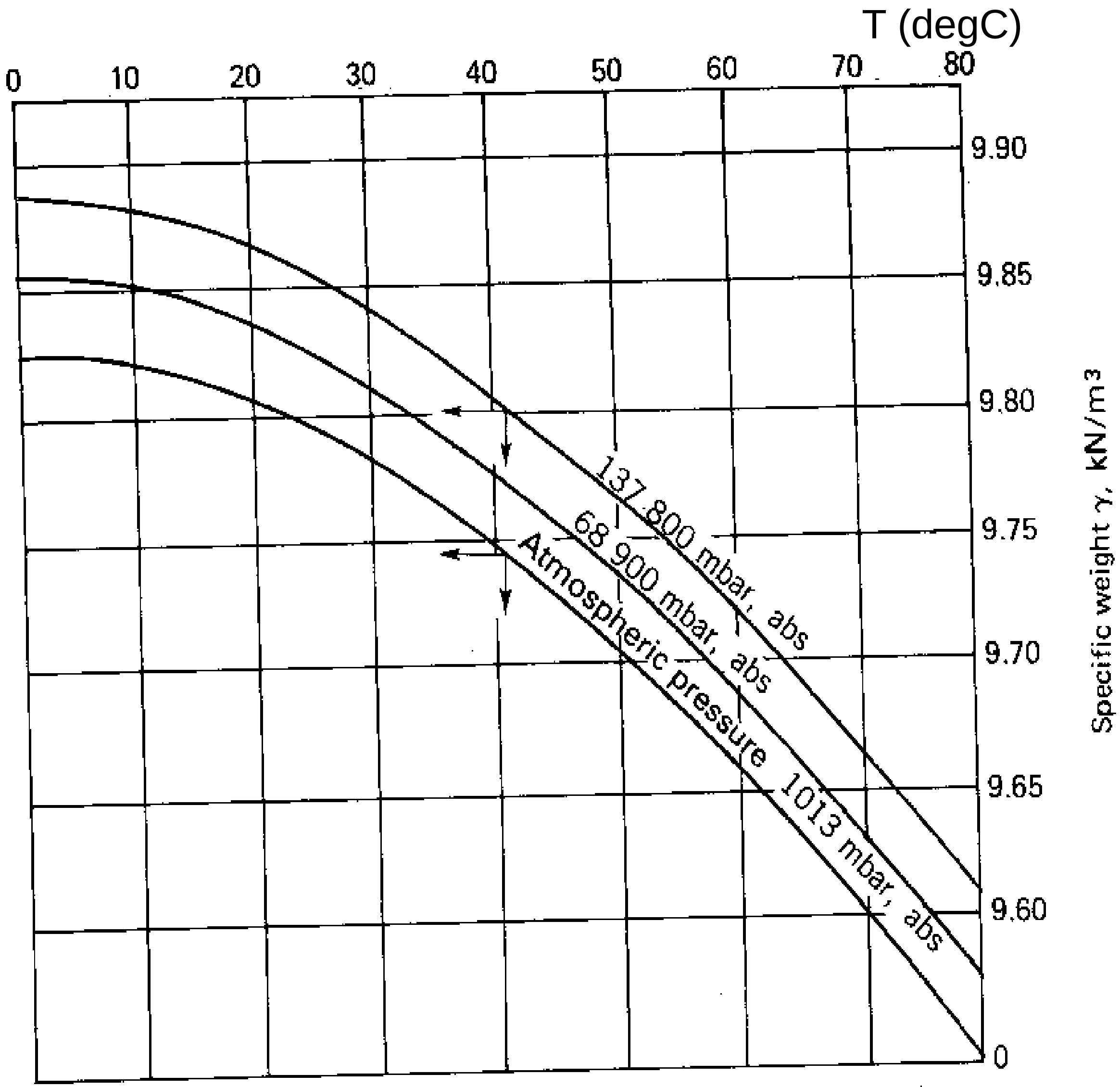
(πηγή: Λιακόπουλος Α., «Υδραυλική», Εκδόσεις Τζιόλα, 2020)

(α) Πυκνότητα ρ και ειδικό βάρος γ ($g = 9.81 m/s^2$)

Θερμοκρασία °C	Αλατότητα = 30‰		Αλατότητα = 35‰		Αλατότητα = 40‰	
	ρ (kg/m^3)	γ (N/m^3)	ρ (kg/m^3)	γ (N/m^3)	ρ (kg/m^3)	γ (N/m^3)
0	1024.11	10046.52	1028.13	10085.96	1032.17	10125.59
5	1023.75	10042.99	1027.70	10081.74	1031.67	10120.68
10	1023.08	10036.42	1026.97	10074.58	1030.88	10112.93
15	1022.15	10027.29	1025.99	10064.96	1029.85	10102.83
20	1020.99	10015.91	1024.78	10053.09	1028.60	10090.57
25	1019.60	10002.28	1023.37	10039.26	1027.15	10076.34
30	1018.01	9986.68	1021.75	10023.37	1025.51	10060.25

(β) Κινηματικό ιξώδες, ν

Θερμοκρασία °C	Κινηματικό ιξώδες (αλατότητα = 35‰)
10	$1.40 \times 10^{-6} m^2/s$
15	$1.22 \times 10^{-6} m^2/s$
20	$1.08 \times 10^{-6} m^2/s$



Ειδική βαρύτητα γ του νερού σε διαφορετικές πιέσεις και θερμοκρασίες

Φυσικές Ιδιότητες διαφόρων ρευστών
(πηγή: Λιακόπουλος Α., «Υδραυλική», Εκδόσεις Τζιόλα, 2020)

Υγρό	Θερμοκρασία T(°C)	Πυκνότητα ρ (kg/m³)	Δυναμικό ιξώδες $\mu \times 10^3$ (N·s/m²)	Τάση ατμών $p_\upsilon \times 10^{-3}$ (N/m² abs.) (απόλυτη πίεση)	Μέτρο ελαστικότητας όγκου $E_\upsilon \times 10^{-9}$(N/m²)
Αιθανόλη	20	789	1.19	5.9	1.06
Βενζίνη	16	680	0.31	55	1.3
Γλυκερίνη	20	1260	1500	14	4.52
Υδράργυρος	20	13600	1.57	1.6×10^{-4}	28.5
Έλαιο SAE 30	16	912	380	-	1.5
Θαλασσινό νερό	16	1030	1.20	1.77	2.34
Νερό	16	999	1.12	1.77	2.15

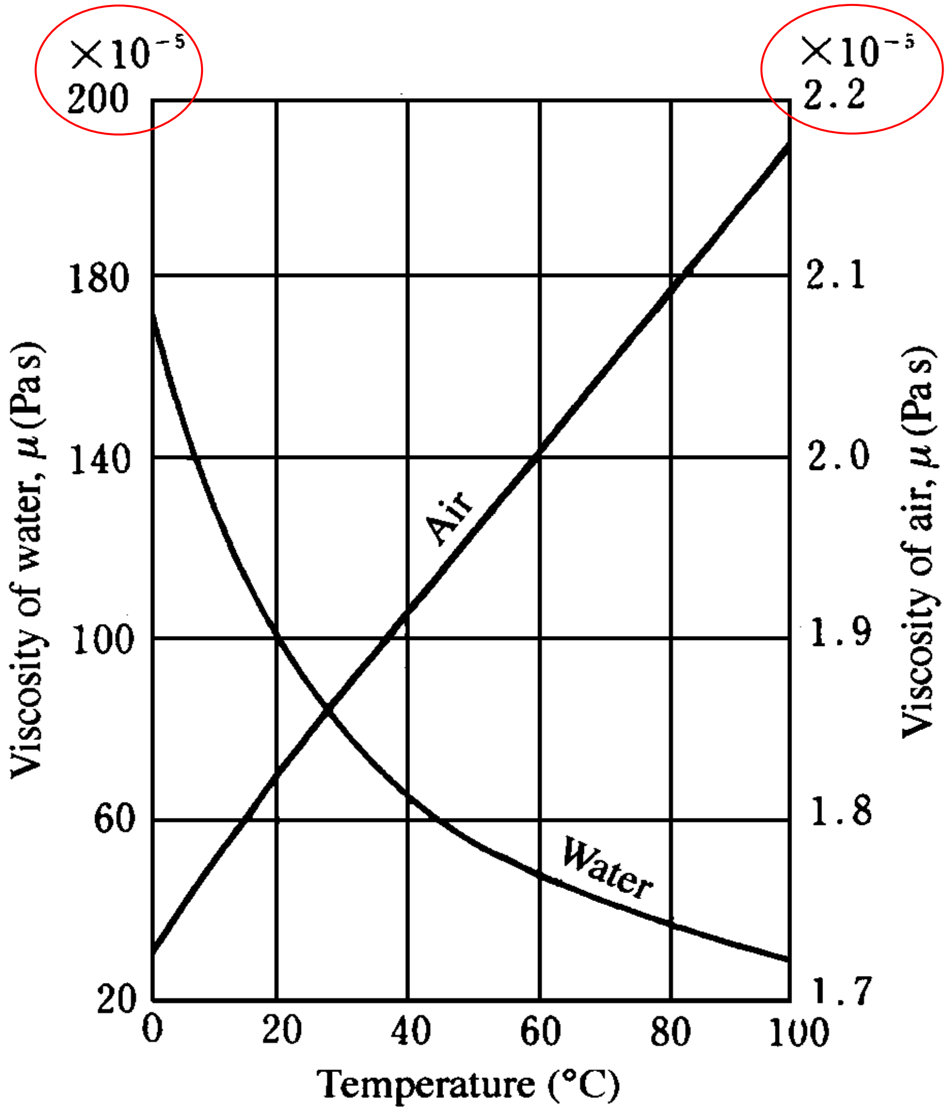
Πηγή: Henry Liu, “Pipeline Engineering”, Lewis Publishers, 2003.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.

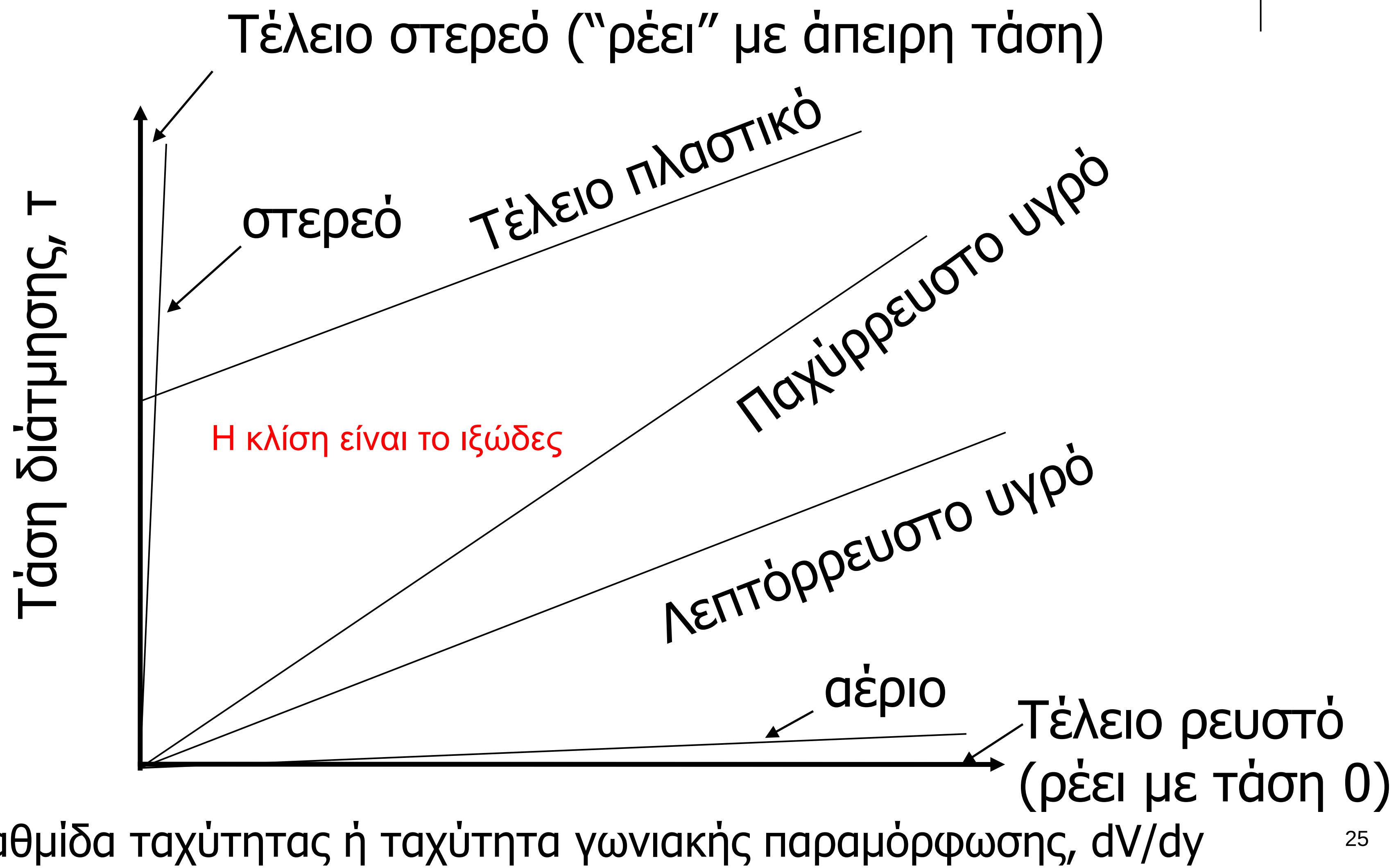
Φυσικές ιδιότητες αέρα σε κανονική ατμοσφαιρική πίεση: σε μονάδες S.I.

Θερμοκρασία T, °C	Θερμοκρασία T, °F	Πυκνότητα ρ kg/m³	Ειδικό βάρος γ, N/m³	Ιξώδες $\mu x 10^5$, N s/m²	Κινηματικό ιξώδες $\nu x 10^5$ m²/s
-40	-40	1.515	14.86	1.49	0.98
-20	- 4	1.395	13.68	1.61	1.15
0	32	1.293	12.68	1.71	1.32
10	50	1.248	12.24	1.76	1.41
20	68	1.205	11.82	1.81	1.50
30	86	1.165	11.43	1.86	1.60
40	104	1.128	11.06	1.90	1.68
60	140	1.060	10.40	2.00	1.87
80	176	1.000	9,81	2.09	2.09
100	212	0.946	9.28	2.18	2.31
200	392	0.747	7.33	2.58	3.45

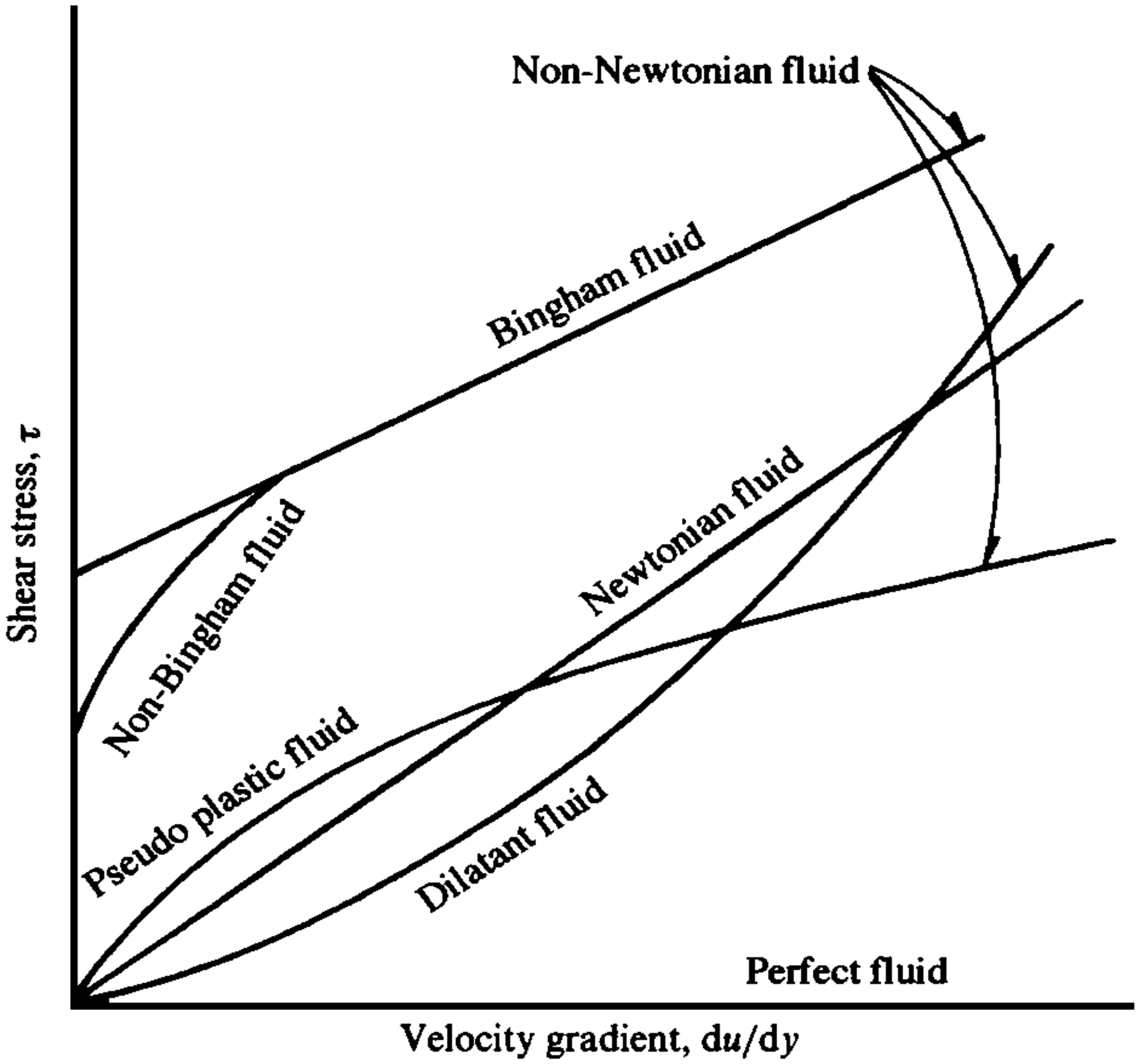
Ιξώδες νερού και αέρα



Συμπεριφορά σωμάτων σε διάτμηση



Νευτώνεια και μη-νευτώνεια ρευστά

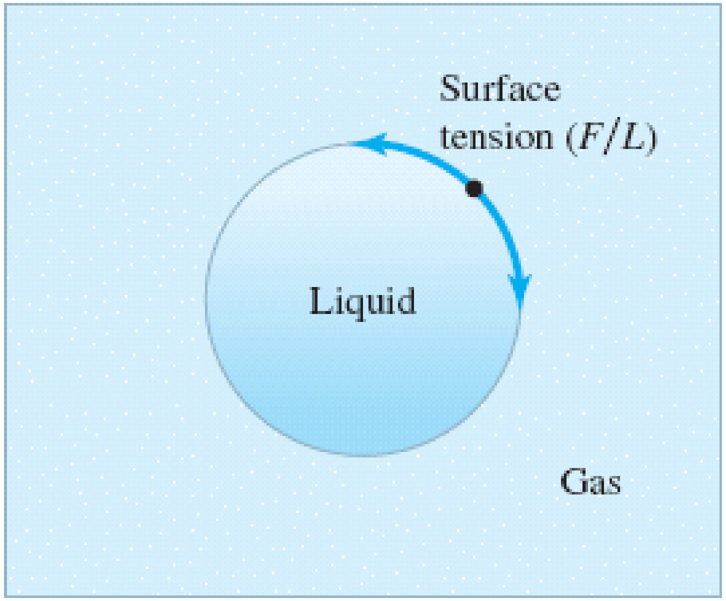


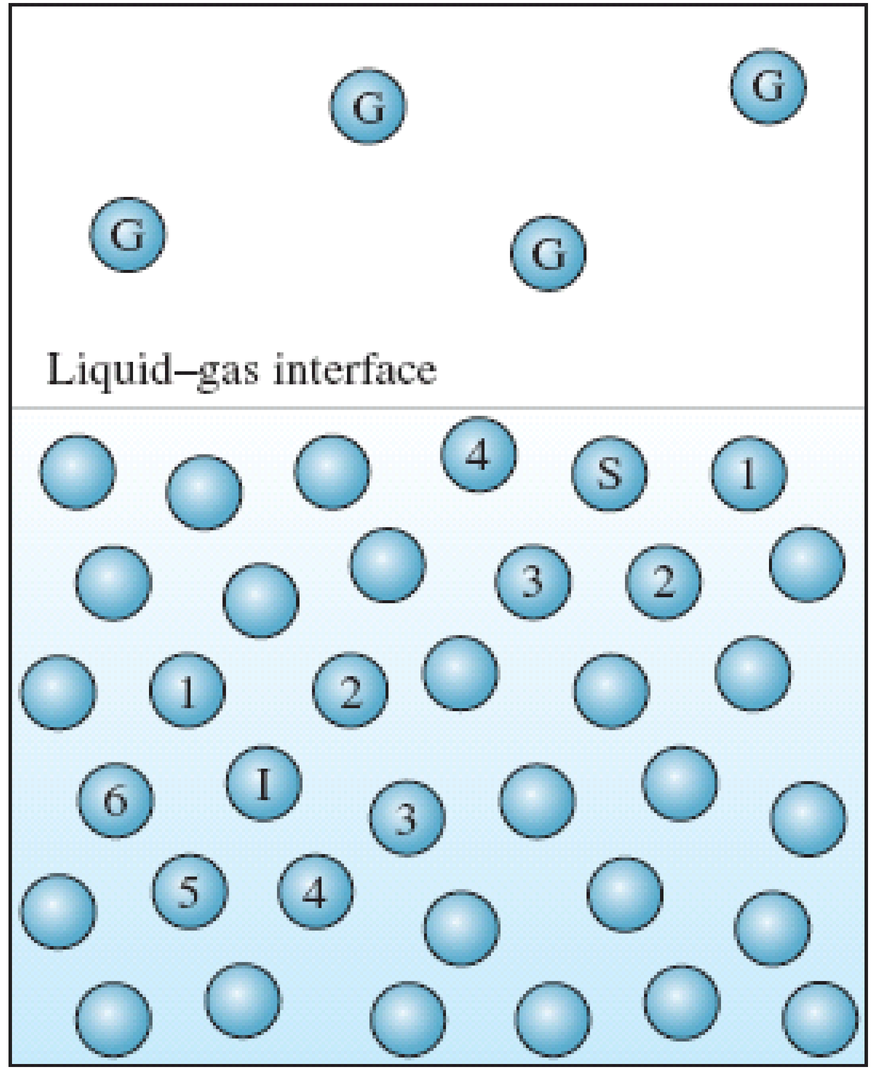
Μη-νευτώνεια ρευστά: Το ιξώδες μεταβάλλεται με την βαθμίδα ταχύτητας. Η κλίση δεν είναι σταθερή. Είτε αυξάνεται, είτε μειώνεται

Πίεση υδρατμών, Επιφανειακή τάση

- Πίεση υδρατμών
- Επιφανειακή τάση: απαιτούμενη ενέργεια για μεταφορά μορίων στην επιφάνεια = το έργο για να μεταφερθεί από το εσωτερικό ένα μοναδιαίο εμβαδό στην επιφάνεια (Nm/m^2)
- Όχι σημαντική για συνηθισμένες εφαρμογές

Επιφανειακή τάση





Χρειάζεται κάποιο <u>έργο για να μεταφερθεί ένα στοιχειώδης όγκος από τη θέση I στη θέση S</u>, δηλαδή στην επιφάνεια, επειδή εκεί οι ελκτικές δυνάμεις των γειτονικών στοιχειωδών όγκων είναι ανομοιόμορφα κατανεμημένες

Επιφανειακή τάση

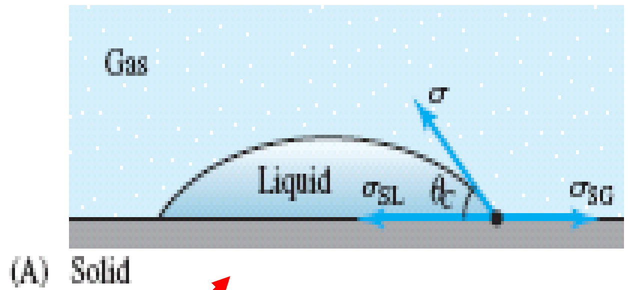
Liquid	Surface Tension, σ (N/m) When in Contact with Air	Surface Tension, σ (N/m) When in Contact with Water
Benzene	0.029	0.035
Carbon tetrachloride	0.027	0.045
Glycerin	0.063	—
Hexane	0.018	0.051
Mercury	0.484	0.375
Methanol	0.023	0.023
Octane	0.022	0.051
Water	0.073	—

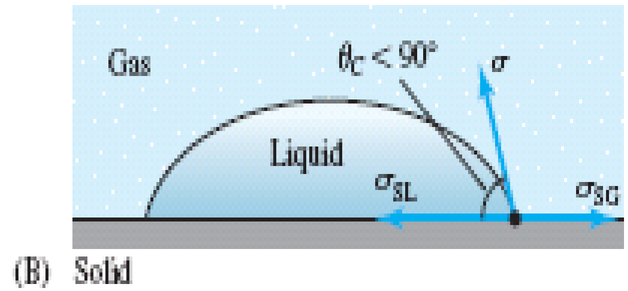
Επιφανειακή τάση - συνέπειες

Το αν το υγρό θα "υγράνει" την επιφάνεια του στερεού, ή όχι, εξαρτάται από την γωνία επαφής θc, για την οποία ισχύει:

$$\theta_c = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}}$$

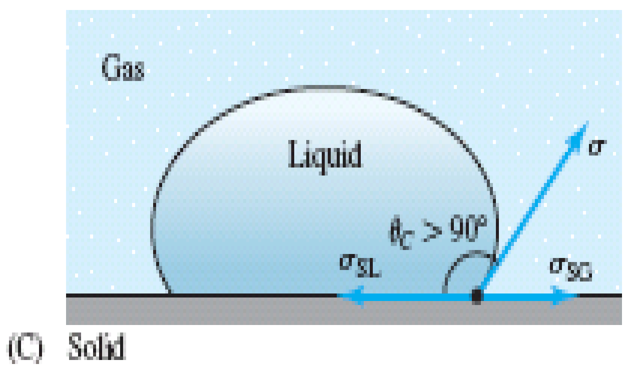
Όπου σ_{ik} είναι οι επιφανειακές τάσεις των τριών διεπιφανειών





Η ισορροπία δυνάμεων στην επιφάνεια επαφής

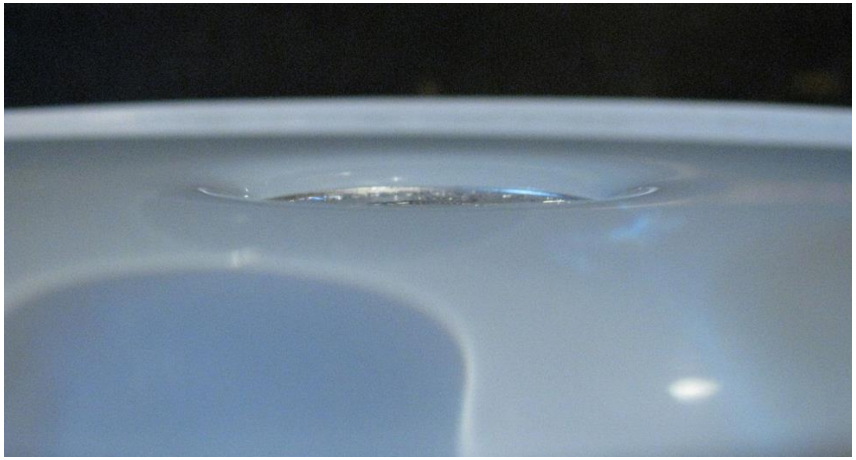
Το υγρό «διαβρέχει» το στερεό, επειδή η γωνία επαφής είναι θc<90^o



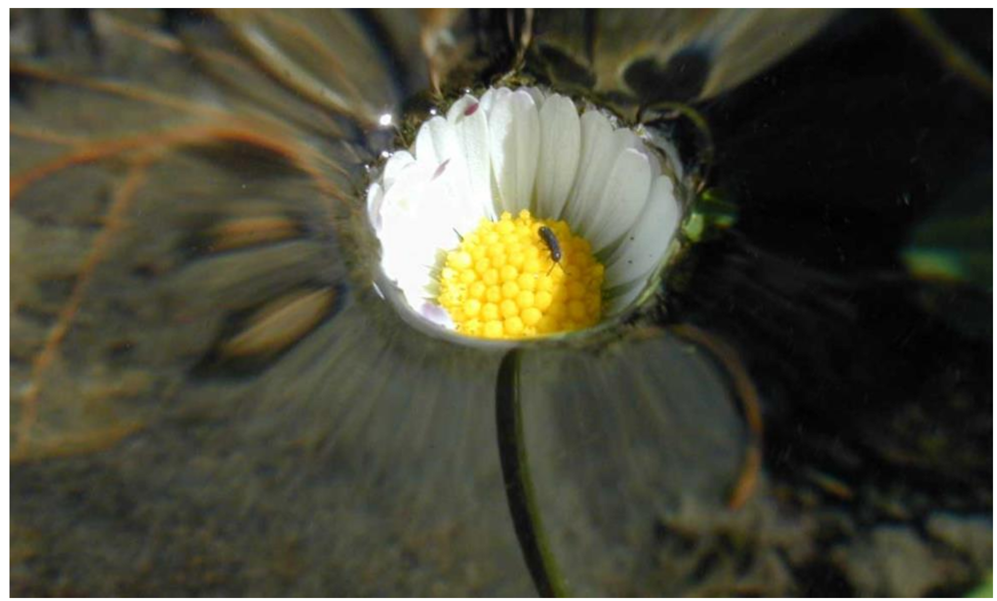
Το υγρό δεν «διαβρέχει» το στερεό, επειδή η γωνία επαφής είναι θc>90^o

$\sigma_{νερ}/\sigma_{αερ}=72$
$\sigma_{υδραργ}/\sigma_{αερ}=487$
$\sigma_{νερ}/\sigma_{υδραργ}=415$

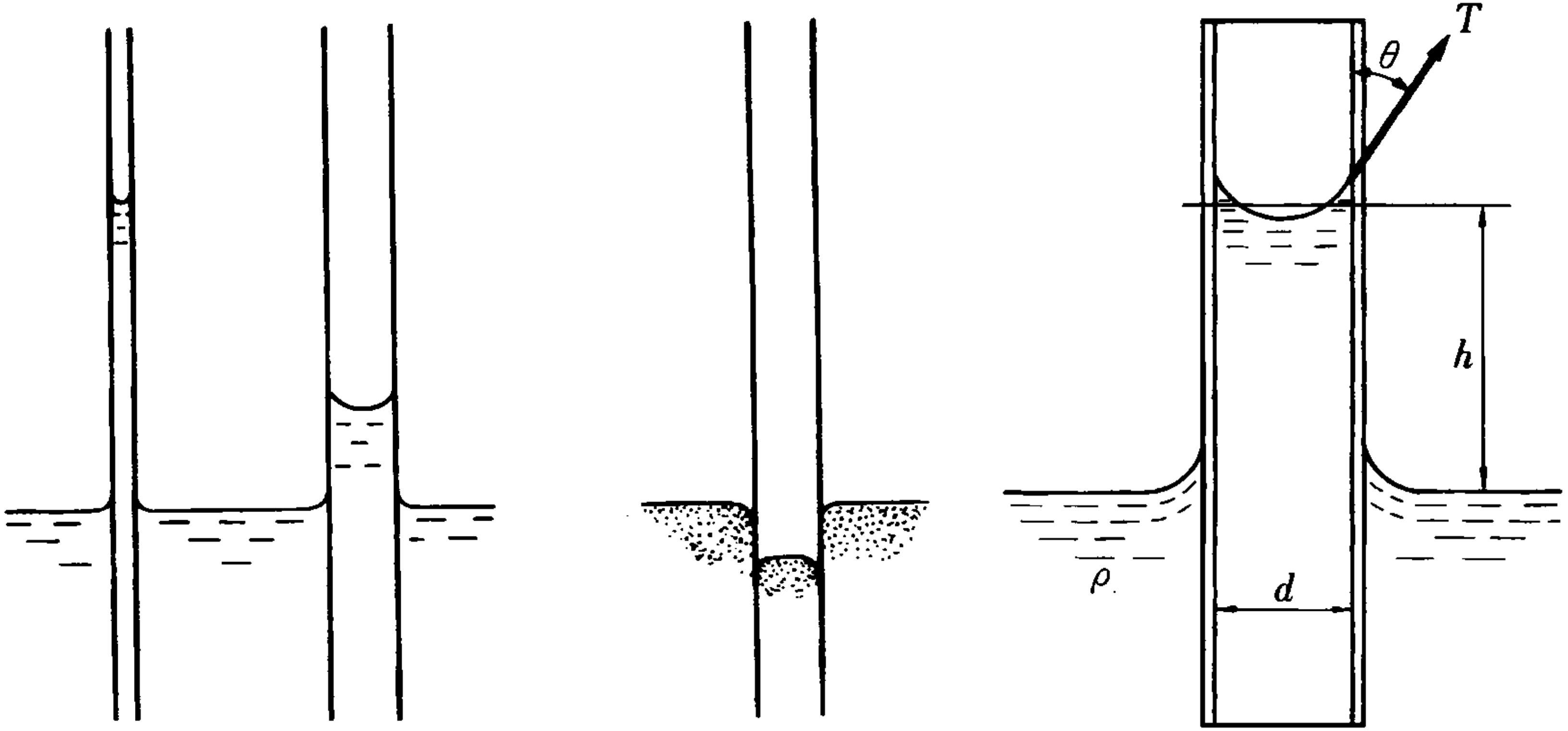
Στο σύστημα αέρας-νερό-γυαλί, είναι θ_c~0, οπότε το νερό διαβρέχει το γυαλί. Στο σύστημα αέρας-υδράργυρος-γυαλί, σχηματίζεται γωνία θ_c ~ 140^o, οπότε ο υδράργυρος δεν διαβρέχει το γυαλί




1
PENGŐ



Τριχοειδή φαινόμενα



(a) Water (b) Mercury

Στους σωλήνες μικρής διαμέτρου, στο φαινόμενο της "διαβροχής", προστίθεται και αυτό της αντίστοιχης ανύψωσης ή ταπείνωσης της στάθμης

Ανύψωση στάθμης λόγω τριχοειδών για τρία υγρά, σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία

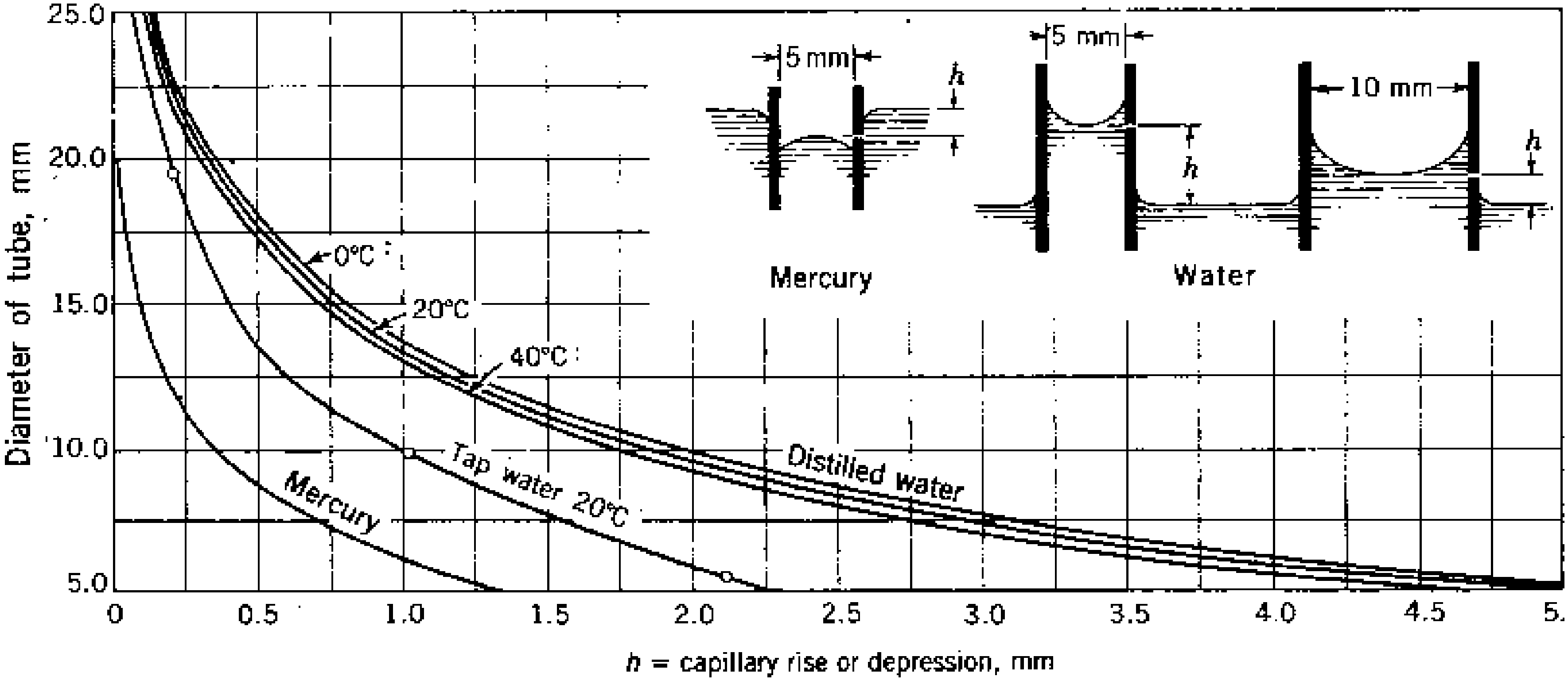


Figure 1.7 Capillarity in clean circular glass tubes.

Ανύψωση της στάθμης

Στην περίπτωση C, οι δυνάμεις των ατμοσφαιρικών πιέσεων είναι ίσες και αλληλοαναιρούνται. Η εξισορρόπηση της επιφανειακής τάσης με το βάρος της στήλης, δίνει για το ύψος της στήλης:

$$h = \frac{4\sigma \cos\theta_c}{d\rho g}$$

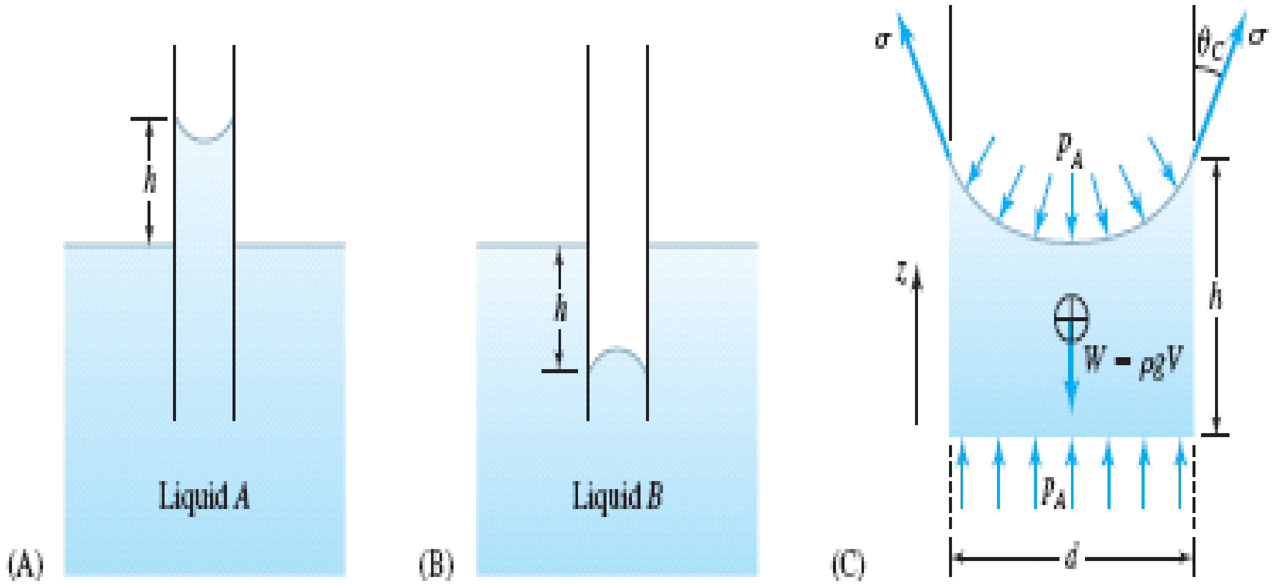


Figure 2.23 The capillary action in a solid tube depends on the contact angle associated with the corresponding gas–liquid–solid system. (A) When the liquid wets the solid ($\theta_c < 90°$), the liquid level within the tube will be above the liquid–gas interface outside the tube. (B) When the liquid does not wet the solid ($\theta_c > 90°$), the liquid level within the tube will be below the general liquid–gas interface. (C) Enlarged view of the case in (A) including the terms associated with the force balance on the liquid within the capillary tube. See text for discussion of this force balance.

τριχοειδή φαινόμενα (capillarity)

- Από επιφανειακή τάση:
- Συνοχή υγρού < συνάφεια υγρού/τοιχώμ. Βρέχεται το τοίχωμα
- Συνοχή υγρού > συνάφεια υγρού/τοιχώμ. Δεν βρέχεται το τοίχωμα
- Σωλήνες <10mm και πορώδη μέσα

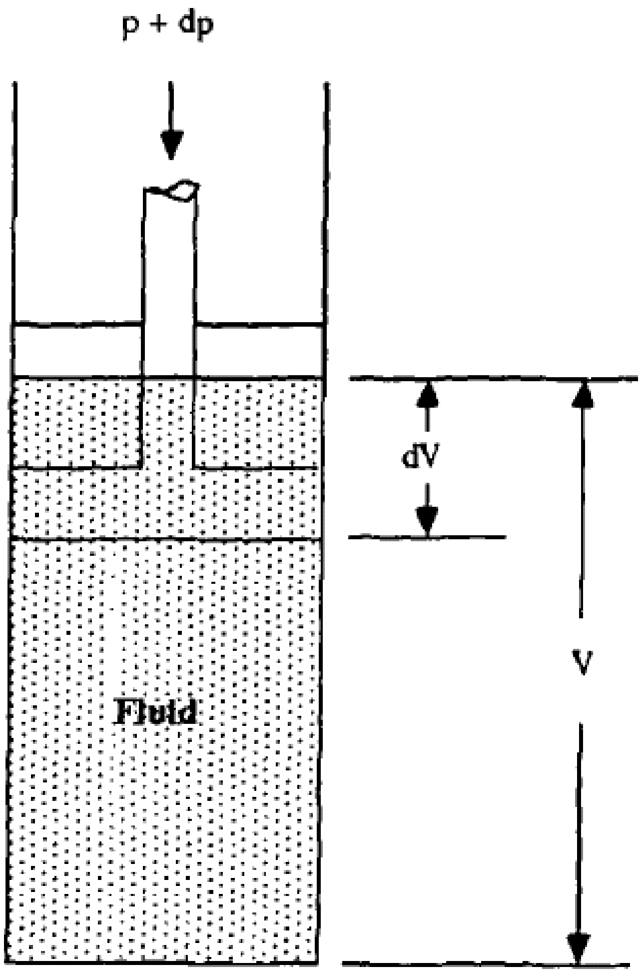
Υδροστατική πίεση, μέτρο ελαστικότητας

- Διαφορική πίεση: $p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1)$
- Ταχύτητα μετάδοσης κυμάτων: $C = (E/\rho)^{1/2}$
- E = μέτρο συμπιεστότητας (ελαστικότητας) ($Pa = Pa/(m^3/m^3)$): πίεση που χρειάζεται δια της αντίστοιχης αδιάστατης αλλαγής όγκου

$$E = \frac{dp}{-\frac{dU}{U}}$$

Μέτρο συμπιεστότητας ή ελαστικότητας

$$E = \frac{dp}{-\dfrac{dU}{U}}$$



Διαστάσεις μεγεθών

$$Q = cL^{\alpha}M^{\beta}T^{\gamma} \quad \text{(SI)}$$

Quantity	Absolute system of units			
	α	β	γ	Units
Length	1	0	0	m
Mass	0	1	0	kg
Time	0	0	1	s
Velocity	1	0	−1	m/s
Acceleration	1	0	−2	m/s^2
Density	−3	1	0	kg/m^3
Force	1	1	−2	$N = kg\,m/s^2$
Pressure, stress	−1	1	−2	$Pa = N/m^2$
Energy, work	2	1	−2	J
Viscosity	−1	1	−1	Pa s
Kinematic viscosity	2	0	−1	m^2/s

Άσκηση πυκνότητας

Εάν 5.6 m^3 ενός λαδιού ζυγίζουν 46800 N, υπολογίστε την πυκνότητα ρ και την σχετική πυκνότητά του.

Ειδικό βάρος γ (= ρg) = 46800/5.6 =8360 N/m^3,

Πυκνότητα $\rho = \gamma/g$ = 8360/9.81 = 852 kg/m^3

Σχετική πυκνότητα ή ειδική βαρύτητα

$\rho_{λαδιού} / \rho_{νερού}$ = 852 / 1000 = 0.852

Άσκηση μέτρου ελαστικότητας

Να βρεθεί η αλλαγή του όγκου 1.00 m^3 νερού στους 26.7^{o}C, όταν υπόκειται σε πίεση 20 bar. Επίσης, από τα παρακάτω δεδομένα, να υπολογιστεί το μέτρο ελαστικότητας του νερού E: στα 35 bar, ο όγκος ήταν 1.000 m^3 και στα 240 bar ήταν 0.990 m^3. Το E στους 26.7^{o}C είναι 2.24.10^9 Pa

Άσκηση μέτρου ελαστικότητας

Να βρεθεί η αλλαγή του όγκου 1.00 m^3 νερού στους 26.7 ^oC, όταν υπόκειται σε πίεση 20 bar (Το E στους 26.7^oC είναι 2.24.10^9 Pa).

Επίσης, από τα παρακάτω δεδομένα, να υπολογιστεί το μέτρο ελαστικότητας του νερού E: στα 35 bar, ο όγκος ήταν 1.000 m^3 και στα 240 bar ήταν 0.990 m^3.

Ο ορισμός του μέτρου ελαστικότητας είναι:

$$E = \frac{dp}{-\frac{dV}{V}} \Rightarrow dV = -\frac{V \cdot dp}{E} = -\frac{1 \cdot 20 \cdot 10^5}{2.24 \cdot 10^9} = -0.00089 m^3$$

$$E = \frac{dp}{-\frac{dV}{V}} = -\frac{(240 - 35) \cdot 10^5}{\frac{(0.99 - 1)}{1}} = 2.05 \cdot 10^9 \, Pa$$

Βασικές Θεωρητικές Αρχές της Υδραυλικής

Βασικές θεωρητικές αρχές

Η Μηχανική του Συνεχούς Μέσου, και κατά συνέπεια και η Μηχανική των Ρευστών και η Υδραυλική, στηρίζονται στις βασικές αρχές:

- της διατήρησης της μάζας.
- Της διατήρησης της γραμμικής ορμής και της στροφορμής και
- της διατήρησης της ενέργειας.

Επομένως στη συνέχεια θα δούμε:

- Διατήρηση της μάζας – εξίσωση της συνέχειας
- Κινηματική (επιτάχυνση ανά άξονα)
- Παραμορφώσεις και τανυστής παραμορφώσεων
- Τάσεις και τανυστής τάσεων
- Εξισώσεις κίνησης (τάσεις, ταχύτητες, πυκνότητα)
- Καταστατικές εξισώσεις (τάσεις – παραμορφώσεις – εξισώσεις Navier-Stokes / ασυμπίεστο ρευστό – Εξισώσεις Euler / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό)
- Διατήρηση της ενέργειας – Εξίσωση Bernoulli / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό κατά μήκος γραμμής ροής

Διατήρηση της μάζας

Εάν v είναι το διάνυσμα της ταχύτητας και V ο όγκος:

Ο όγκος της ύλης που διασχίζει ένα στοιχειώδες τμήμα dS μιας κλειστής επιφάνειας S στη μονάδα του χρόνου είναι $-\bar{v}d\bar{S}$ και άρα η συνολική μάζα που εξέρχεται είναι:

$$-\iint_S \rho\bar{v}d\bar{S}$$

Η αντίστοιχη μεταβολή της μάζας μέσα στο χώρο που περικλείεται από την S:

$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dV$ και επειδή V=ct : $\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV$ και επομένως πρέπει:

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\iint_S \rho\bar{v}d\bar{S}$$

Μεταβολή της μάζας στην κλειστή επιφάνεια

Μάζα που εξέρχεται από την κλειστή επιφάνεια

Εξίσωση της συνέχειας από τη διατήρηση της μάζας

Όμως το θεώρημα Green επιτρέπει την μετατροπή ενός επιφανειακού ολοκληρώματος σε ολοκλήρωμα όγκου – όταν η ποσότητα του επιφανειακού ολοκληρώματος είναι διάνυσμα που ορίζεται επάνω στην κλειστή επιφάνεια - ως εξής:

Green

$$\iiint_V \frac{d\rho}{dt} dV = -\iint_S \rho\bar{v}d\bar{S} = \iiint_V \frac{d\rho}{dt} dV \Rightarrow$$

$$\iiint_V \frac{d\rho}{dt} dV = -\iiint_V div(\rho\bar{v}) dV \Rightarrow$$

$$\frac{d\rho}{dt} + div(\rho\bar{v}) = 0$$

Τριπλά ολοκληρώματα στον ίδιο όγκο V

Για ασυμπίεστα ρευστά μάλιστα, όπου: ρ=ct η εξίσωση γίνεται $div(\rho\bar{v}) = 0$

ενώ υπενθυμίζεται ότι $$div(\rho\bar{v}) = \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial x_3}$$

Επομένως για ασυμπίεστα ρευστά

$$\boxed{\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0}$$

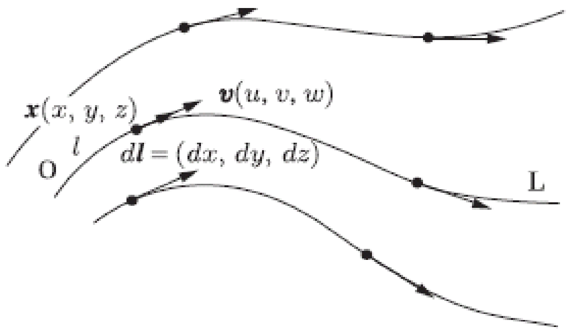
Εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό

όπου οι διευθύνσεις x_1, x_2, x_3, αντιπροσωπεύουν οποιοδήποτε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων.

Επομένως στη συνέχεια θα δούμε:

- Διατήρηση της μάζας – εξίσωση της συνέχειας
- Κινηματική (επιτάχυνση ανά άξονα)
- Παραμορφώσεις και τανυστής παραμορφώσεων
- Τάσεις και τανυστής τάσεων
- Εξισώσεις κίνησης (τάσεις, ταχύτητες, πυκνότητα)
- Καταστατικές εξισώσεις (τάσεις – παραμορφώσεις – εξισώσεις Navier-Stokes / ασυμπίεστο ρευστό – Εξισώσεις Euler / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό)
- Διατήρηση της ενέργειας – Εξίσωση Bernoulli / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό κατά μήκος γραμμής ροής

Κινηματική



– Τροχιά (pathline) = γεωμετρικός τόπος θέσεων στοιχείου

– Ροϊκές γραμμές (streamlines) = δίνουν τη μορφή της ροής σε ορισμένο χρόνο και ταχύτητα εφαπτομένη σε κάθε σημείο τους

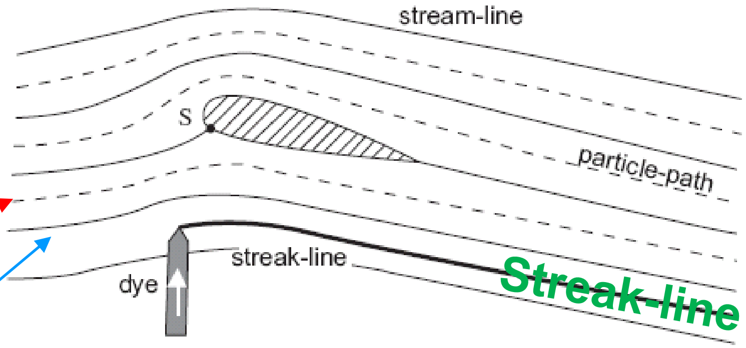


Fig. 1.3. Steady flow: stream-lines (thin solid lines), particle-path (broken lines), and streak-lines (a thick solid line).

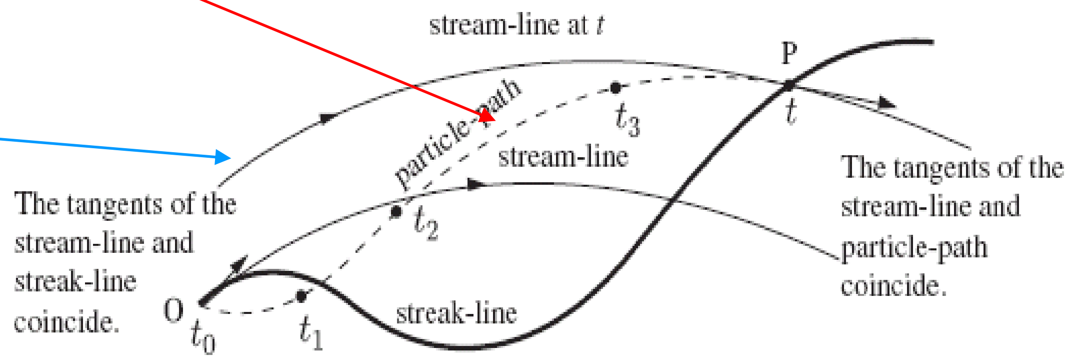
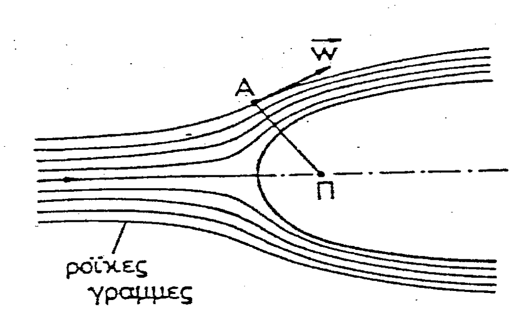


Fig. 1.4. Unsteady flow: stream-lines (thin solid lines), particle-path (a broken line), and streak-line (a thick solid line). The particle P started from the fixed point O at a time t_0 and is now located at P at t after the times t_1, t_2 and t_3.

Κινηματική



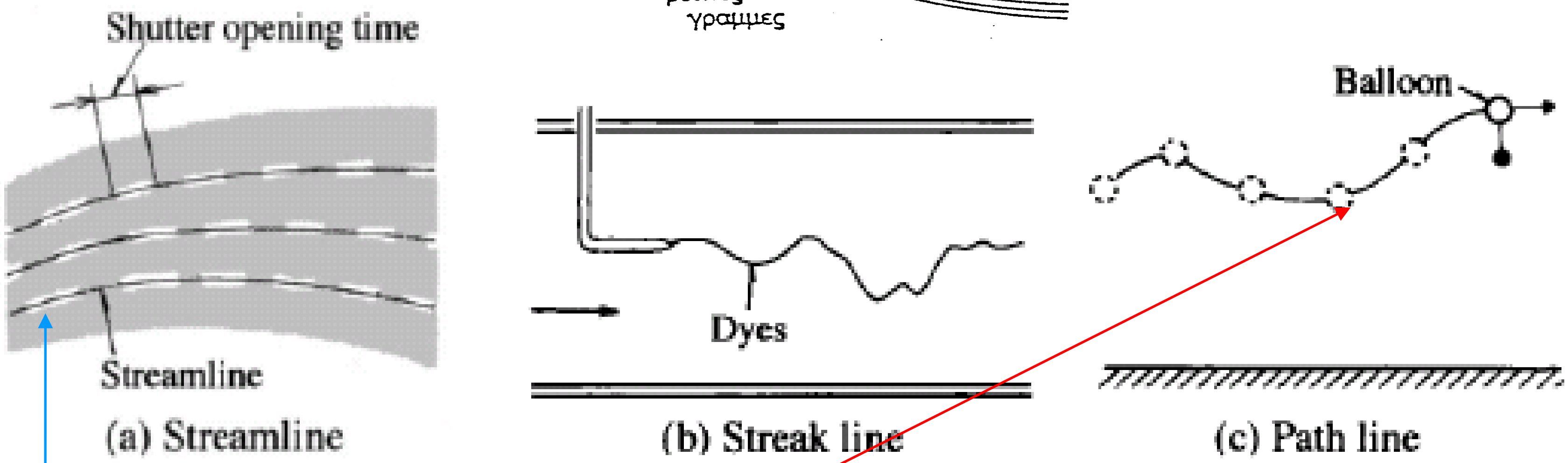
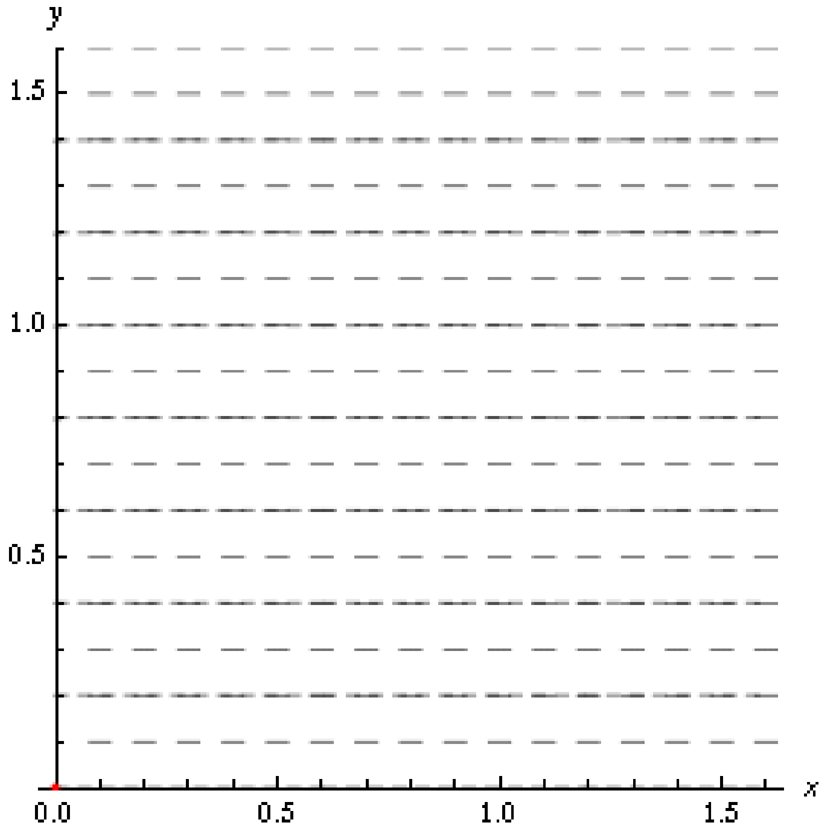


Fig. 4.1 Lines showing flows

- Τροχιά (pathline) = γεωμετρικός τόπος θέσεων στοιχείου
- Ροϊκές γραμμές (streamlines) = δίνουν τη μορφή της ροής σε ορισμένο χρόνο και ταχύτητα εφαπτομένη σε κάθε σημείο τους

Ροϊκές γραμμές, τροχιές και streakines στην ασταθή ροή



Το κόκκινο σωματίδιο του ρευστού κινείται με τη ροή (κόκκινη γραμμή). Το ίχνος του μπλέ μελανιού που εξέρχεται από την αρχή, ακολουθεί το σωματίδιο, αλλά αντίθετα με την στατική τροχιά (pathline), η οποία καταγράφει την κίνηση του σωματιδίου, το ίχνος (μελάνι) που εκλύεται μετά την έξοδο της κόκκινης γραμμής, συνεχίζει την κίνησή του με τη ροή. Αυτή είναι η streakline. Οι διακεκομμένες γραμμές αναπαριστούν ισοδυναμικές γραμμές του πεδίου ταχύτητας, **ροϊκές γραμμές** (streamlines), που δείχνουν την κίνηση του ολικού πεδίου κάθε στιγμή.

Streakline σε windtunnel

Κινηματική: Euler vs Lagrange

Euler	Lagrange
Συνάρτηση του χώρου μέσα στον οποίο κινούνται τα υλικά σημεία	Συνάρτηση των κινούμενων υλικών σημείων
Γραμμές ροής (streamlines) – εφαπτομένη η διεύθυνση της ταχύτητας- δίνουν τη μορφή της ροής σε ορισμένο χρόνο	Τροχιές (pathlines) – γραμμές κίνησης των υλικών σημείων = γεωμετρικός τόπος θέσεων στοιχείου
ροϊκή κατάσταση σε σημείο στον t	παρακολούθηση στοιχείου στον χώρο
Τροχιές και ροϊκές γραμμές συμπίπτουν σε σταθερή στρωτή ροή	

Κινηματική: η ταχύτητα

Euler: κινηματική κατάσταση συνάρτηση του χώρου μέσα στον οποίο κινούνται τα υλικά σημεία.
Lagrange: συνάρτηση των υλικών σημείων του υγρού.
Η πρώτη χρησιμοποιεί τις γραμμές ροής, δηλαδή τις καμπύλες που σε κάθε στιγμή και σε κάθε σημείο τους, η εφαπτομένη τους έχει τη διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας.
Η δεύτερη, χρησιμοποιεί τις τροχιές, δηλαδή τις γραμμές που διαγράφουν στην κίνησή τους τα υλικά σημεία.
Στην ειδική περίπτωση της μόνιμης κίνησης, η ταχύτητα σε κάθε σημείο παραμένει σταθερή, και οι γραμμές ροής δεν μεταβάλλονται. Αυτό σημαίνει ότι ένα υλικό σημείο που βρίσκεται σε μία συγκεκριμένη γραμμή ροής, θα παραμείνει σ’αυτήν.
Συνεπώς, κατά τη μόνιμη κίνηση, οι τροχιές ταυτίζονται με τις γραμμές ροής.

Ταχύτητα κατά Euler: $$v_i = \frac{dx_i}{dt}$$

Ταχύτητα κατά Lagrange: $$v_i = \frac{\partial x_i(\xi, t)}{\partial t}$$

Κινηματική: η μεταβολή της πυκνότητας

Η μεταβολή της πυκνότητας με την προσέγγιση Euler είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\xi_i, t) = \frac{\partial \rho}{\partial x_1}v_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_2}v_2 + \frac{\partial \rho}{\partial x_3}v_3 + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ενώ με την προσέγγιση Lagrange:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho(\xi_i, t)}{\partial t}$$

Κινηματική – η επιτάχυνση

Η μεταβολή κατά Euler ενός συνεχούς μεγέθους ως προς το χρόνο, ονομάζεται υλική παράγωγος και συμβολίζεται με D/Dt. Για παράδειγμα η επιτάχυνση είναι:

$$a_\iota = \frac{\mathrm{D}v_i}{Dt} = v_j v_{i,j} + \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

ή ανά άξονα:

$$a_1 = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{t}} = v_i \frac{\partial v_1}{\partial x_i} + \frac{\partial v_1}{\partial \mathrm{t}}$$

και αντίστοιχα:

$$a_2 = v_i \frac{\partial v_2}{\partial x_i} + \frac{\partial v_2}{\partial \mathrm{t}}$$

$$a_3 = v_i \frac{\partial v_3}{\partial x_i} + \frac{\partial v_3}{\partial \mathrm{t}}$$

Η επιτάχυνση στους τρείς άξονες

Η επιτάχυνση σε κάθε άξονα, είναι ίση με το άθροισμα των ταχυτήτων σε κάθε άξονα, πολλαπλασιασμένων με την μεταβολή της ταχύτητας στον άξονα, συν την παράγωγο της ταχύτητας ως προς τον χρόνο

Ασκηση κινηματικής

Το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού δίνεται από τις σχέσεις

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t}, \; v_2 = \frac{2x_2}{1+t}, \; v_3 = \frac{3x_3}{1+t}.$$

Να βρεθούν οι επιταχύνσεις και οι τροχιές, σαν συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου

$$a_\iota = \frac{Dv_i}{Dt} = v_j v_{i,j} + \frac{\partial v_i}{\partial t} =$$

Σύμφωνα με την (3.13) έχουμε για τις επιταχύνσεις

$$a_1 = \frac{Dv_1}{Dt} = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_2}} + v_3 \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_3}} + \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{x_1}{1+t}\frac{1}{1+t} - \frac{x_1}{(1+t)^2} = 0,$$

$$a_2 = \frac{Dv_2}{Dt} = v_1 \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_1}} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_3}} + \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{2x_2}{1+t}\frac{2}{1+t} - \frac{2x_2}{(1+t)^2} = \frac{2x_2}{(1+t)^2},$$

$$a_3 = \frac{Dv_3}{Dt} = v_1 \cancel{\frac{\partial v_3}{\partial x_1}} + v_2 \cancel{\frac{\partial v_3}{\partial x_2}} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{3x_3}{1+t}\frac{3}{1+t} - \frac{3x_3}{(1+t)^2} = \frac{6x_3}{(1+t)^2}.$$

Συνέχεια άσκησης κινηματικής

Για να βρούμε τις τροχιές, χρησιμοποιούμε τη σχέση (3.6) και γράφουμε

$$v_i = \frac{dx_i}{dt}$$

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{1+t} \Rightarrow x_1 = c_1.(1+t),$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = \frac{2x_2}{1+t} \Rightarrow x_2 = c_2.(1+t)^2,$$

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = \frac{3x_3}{1+t} \Rightarrow x_3 = c_3.(1+t)^3.$$

Αλλά για $t = 0$,

$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3$. (η θέση την χρονικη στιγμή t=0)

Συνεπώς

$c_1 = \xi_1, \quad c_2 = \xi_2, \quad c_3 = \xi_3$ και

$x_1 = \xi_1.(1+t), \quad x_2 = \xi_2.(1+t)^2, \quad x_3 = \xi_3.(1+t)^3$. (Σχέσεις Β)

Συνέχεια άσκησης κινηματικής

Είναι φανερό ότι το πεδίο των επιταχύνσεων (Σχέσεις Α) μπορεί να υπολογιστεί επίσης και από τις εξισώσεις των τροχιών (Σχέσεις Β). Συγκεκριμένα

$$a_1 = \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = 0 \ ,$$

$$a_2 = \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = 2\xi_2 = \frac{2x_2}{(1+t)^2} \ ,(\text{αντικατασταση του } \xi_2 \text{ απο τις Σχεσεις Β})$$

$$a_3 = \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} = 6\xi_3(1+t) = \frac{6x_3}{(1+t)^2} \ .(\text{αντικατασταση του } \xi_3 \text{ απο τις Σχεσεις Β})$$

Επομένως στη συνέχεια θα δούμε:

- Διατήρηση της μάζας – εξίσωση της συνέχειας
- Κινηματική (επιτάχυνση ανά άξονα)
- Παραμορφώσεις και τανυστής παραμορφώσεων
- Τάσεις και τανυστής τάσεων
- Εξισώσεις κίνησης (τάσεις, ταχύτητες, πυκνότητα)
- Καταστατικές εξισώσεις (τάσεις – παραμορφώσεις – εξισώσεις Navier-Stokes / ασυμπίεστο ρευστό – Εξισώσεις Euler / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό)
- Διατήρηση της ενέργειας – Εξίσωση Bernoulli / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό κατά μήκος γραμμής ροής

Παραμορφώσεις και τανυστής παραμορφώσεων

Θεωρούμε δύο υλικά σημεία που σε t=0 βρισκόταν στις θέσεις ξ_i και $\xi_i + d\xi_i$. Μετά από χρόνο t, αφού κινήθηκαν στις αντίστοιχες τροχιές τους, βρίσκονται στις θέσεις $x_i = x_i(\xi_i, t)$ και $x_i = x_i(\xi_i + d\xi_i, t)$ αντίστοιχα, και η απόστασή τους θα είναι:

$$dx_i = x_i(\xi_i + d\xi_i, t) - x_i(\xi_i, t) = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j$$

η δε διαφορά των ταχυτήτων τους:

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j$$

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο υλικά σημεία ρευστού που σε δοσμένη χρονική στιγμή βρίσκονται στις θέσεις x_i και $x_i + dx_i$ αντίστοιχα. Σε επόμενη χρονική στιγμή θα έχου μετακινηθεί και η απόστασή τους θα αλλάξει.

Εάν τα σημεία εκλεγούν έτσι ώστε να απέχουν μόνο κατά τον άξονα x_1 (δηλαδή $dx_1 \neq 0$, $dx_2 = dx_3 = 0$), ο λόγος της μεταβολής του μήκους dx1 ως προς τον χρόνο δια του αρχικού μήκους, θα είναι:

Παραμορφώσεις και τανυστής παραμορφώσεων

$$e_{11} = \frac{\frac{d}{dt}(dx_1)}{dx_1} = \frac{\frac{\partial v_1}{\partial \xi_i} d\xi_i}{dx_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

Σχετική μεταβολή μήκους επάνω στον άξονα x1

Οι αντίστοιχες σχετικές μεταβολές των μηκών dx_2 και dx_3 θα είναι: $e_{22} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$ και $e_{33} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$

Ας θεωρήσουμε τώρα τρία γειτονικά σημεία που σε δοσμένη χρονική στιγμή βρίσκονται στις θέσεις x_i, $x_i + dx_1$, $x_i + dx_2$ έτσι ώστε η γωνία που σχηματίζουν με κορυφή το x_i να είναι 90 μοίρες, και οι πλευρές της αντίστοιχα παράλληλες προς τους άξονες x_1 και x_2. Η ποσότητα:

$$e_{12} = e_{21} = -\frac{1}{2}\frac{d\theta}{dt}$$

Σχετική μεταβολή ορθής γωνίας στους άξονες x1 και x2

είναι το μισό της μεταβολής της ορθής αυτής γωνίας.

Αποδεικνύεται ότι $$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)$$

ή γενικότερα και για τα υπόλοιπα ζεύγη αξόνων: $$e_{ij} = e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

Παραμορφώσεις και τανυστής παραμορφώσεων

Ή γενικότερα και για τα υπόλοιπα ζεύγη αξόνων:

$$\boxed{e_{ij} = e_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}$$

Τανυστής παραμορφώσεων

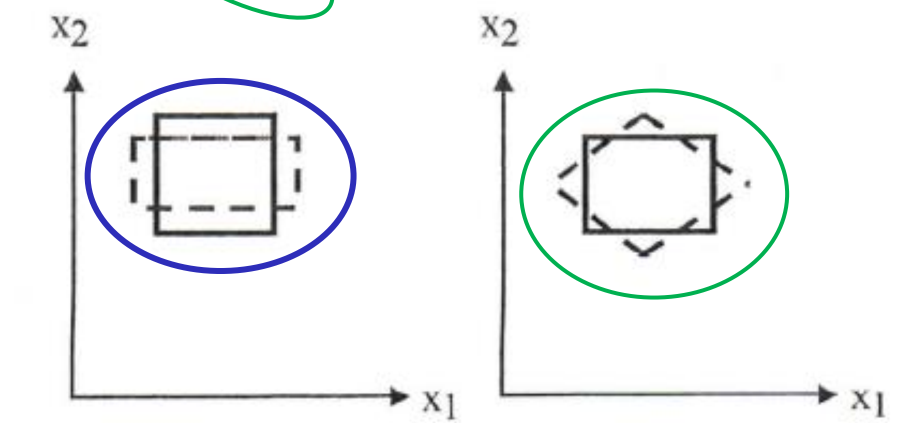
$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

Η παραπάνω σχέση, ισχύει και για την περίπτωση που i=j όπως είδαμε ήδη στα e_{11}, e_{22}, e_{33}.

Δίνει τους όρους του τανυστή παραμορφώσεων, δηλαδή τις ποσότητες που παρουσιάζουν τη μεταβολή μήκους ή ορθών γωνιών ως ιδιότητες ενός σημείου του χώρου.

Δηλαδή ο τανυστής δίνει την παραμόρφωση που θα υποστεί ένας στοιχειώδης κύβος που διέρχεται από ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου.

Οι ορθές γωνίες του παραμορφώνονται από δυνάμεις εφαπτόμενες στις έδρες του, ενώ το μήκος των ακμών του από δυνάμεις κάθετες σε αυτές.



γραμμική παραμόρφωση γωνιακή παραμόρφωση

Επομένως στη συνέχεια θα δούμε:

- Διατήρηση της μάζας – εξίσωση της συνέχειας
- Κινηματική (επιτάχυνση ανά άξονα)
- Παραμορφώσεις και τανυστής παραμορφώσεων
- Τάσεις και τανυστής τάσεων
- Εξισώσεις κίνησης (τάσεις, ταχύτητες, πυκνότητα)
- Καταστατικές εξισώσεις (τάσεις – παραμορφώσεις – εξισώσεις Navier-Stokes / ασυμπίεστο ρευστό – Εξισώσεις Euler / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό)
- Διατήρηση της ενέργειας – Εξίσωση Bernoulli / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό κατά μήκος γραμμής ροής

Τάσεις και τανυστής τάσεων

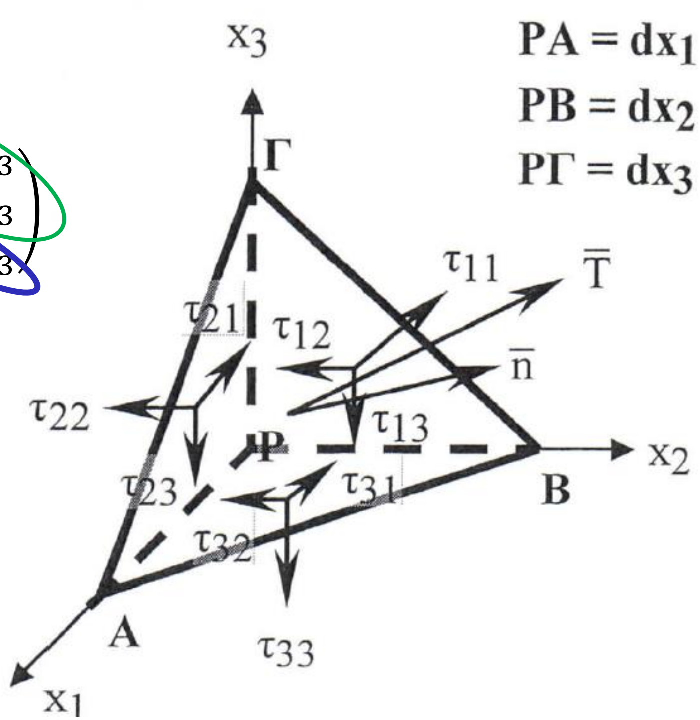
Οι τάσεις, δηλαδή οι στοιχειώδεις δυνάμεις που ενεργούν σε στοιχειώδεις επιφάνειες, συμβολίζονται με τ_{ij}, όπου το i παριστάνει τον άξονα που είναι κάθετος προς το επίπεδο στο οποίο ενεργεί, και το j τον άξονα προς τον οποίο είναι παράλληλη. Οταν μια τάση ενεργεί κάθετα σε επίπεδο, όπως συμβαίνει με τις τ_{11}, τ_{22} και τ_{33}, τότε το εφελκύει (θετική τιμή), ή το συνθλίβει (αρνητική τιμή). Αυτές οι τάσεις είναι ορθές. Οταν μια τάση ενεργεί παράλληλα σε επίπεδο, είναι διατμητική: τέτοιες είναι οι τ_{12}, τ_{21}, τ_{13}, τ_{31}, τ_{23} και τ_{32}. Οι τ_{12} και τ_{13} για παράδειγμα, δρουν στο επίπεδο που είναι κάθετο στον x_1, η πρώτη κατά τη διεύθυνση του x_2, η δεύτερη κατά τη διεύθυνση του x_3.

Οι 9 αυτές τάσεις, αποτελούν τον τανυστή των τάσεων, ο οποίος είναι συμμετρικός, δηλαδή $\tau_{12}=\tau_{21}$, $\tau_{13}=\tau_{31}$, $\tau_{23}=\tau_{32}$.

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

διατμητικές

εφελκυστικές ή θλιπτικές



Παρατηρείστε τις τ_{12} και τ_{13}: και οι δύο δρούν στο επίπεδο 2-3 (το κάθετο στον 1 που είναι ο πρώτος δείκτης), η πρώτη κατά τη διεύθυνση 2 και η δεύτερη κατά τη διεύθυνση 3.
Είναι διατμητικές.
Η τ_{11} δρά στο 2-3 κατά τη διεύθυνση 1, επομένως είναι ορθή (κάθετη στο επίπεδο στο οποίο δρά). Εφελκύει (θετική τιμή), ή θλίβει (αρνητική)

Επομένως στη συνέχεια θα δούμε:

- Διατήρηση της μάζας – εξίσωση της συνέχειας
- Κινηματική (επιτάχυνση ανά άξονα)
- Παραμορφώσεις και τανυστής παραμορφώσεων
- Τάσεις και τανυστής τάσεων
- Εξισώσεις κίνησης (τάσεις, ταχύτητες, πυκνότητα)
- Καταστατικές εξισώσεις (τάσεις – παραμορφώσεις – εξισώσεις Navier-Stokes / ασυμπίεστο ρευστό – Εξισώσεις Euler / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό)
- Διατήρηση της ενέργειας – Εξίσωση Bernoulli / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό κατά μήκος γραμμής ροής

Εξισώσεις κίνησης

Για τη διαμόρφωση της κίνησης ενός ρευστού, μελετάται η κίνηση μάζας που περικλείεται από στοιχειώδη επιφάνεια S, τις δυνάμεις που ενεργούν επάνω της, και τη μεταβολή της γραμμικής ορμής.

Οι δυνάμεις που ενεργούν επάνω στη μάζα είναι: $\tau_{ij} \cdot n_j \cdot dS$ (Τάση επί συνημίτονο κατεύθυνσης επί επιφάνεια)

Το άθροισμα των δυνάμεων από τις τάσεις: $\iint_S \tau_{ij} \cdot n_j \cdot dS$

και το βάρος της μάζας: $\iiint_V f_i \cdot \rho \cdot dV$ (συνιστώσες βαρύτητας επί πυκνότητα)

όπου n_j = τα συνημίτονα κατεύθυνσης του μοναδιαίου διανύσματος που είναι κάθετο στη στοιχειώδη επιφάνεια dS και f_i = οι αντίστοιχες συνιστώσες του διανύσματος της βαρύτητας g. Σύμφωνα με το θεώρημα του Gauss, το άθροισμα των δύο αυτών ειδών δυνάμεων είναι:

$$\iiint_V \rho f_i dV + \iiint_V \tau_{ij,j} dV = \iiint_V \left(\rho f_i + \tau_{ij,j}\right) dV$$

Άθροισμα δυνάμεων των τάσεων + βάρους

Η μεταβολή της γραμμικής ορμής, είναι ίση με το άθροισμα αυτό:

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \left(\rho v_i v_j\right)_{,j}\right] dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho f_i + \tau_{ij,j}\right) dV$$

Μεταβολή της ορμής = Άθροισμα δυνάμεων των τάσεων + βάρους

ή, απλοποιώντας:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \left(\rho v_i v_j\right)_{,j} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho f_i + \tau_{ij,j}\right)$$

Εξισώσεις κίνησης

που είναι η διαφορική εξίσωση της κίνησης του ρευστού, η οποία αναλυτικότερα φαίνεται στις:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_1)+\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_1 v_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_1 v_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\rho v_1 v_3)=\rho f_1+\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_2)+\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_2 v_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_2 v_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\rho v_2 v_3)=\rho f_2+\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_3)+\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_3 v_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_3 v_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\rho v_3 v_3)=\rho f_3+\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}$$

Εξισώσεις κίνησης ρευστού

Επομένως στη συνέχεια θα δούμε:

- Διατήρηση της μάζας – εξίσωση της συνέχειας
- Κινηματική (επιτάχυνση ανά άξονα)
- Παραμορφώσεις και τανυστής παραμορφώσεων
- Τάσεις και τανυστής τάσεων
- Εξισώσεις κίνησης (τάσεις, ταχύτητες, πυκνότητα)
- Καταστατικές εξισώσεις (τάσεις – παραμορφώσεις – εξισώσεις Navier-Stokes / ασυμπίεστο ρευστό – Εξισώσεις Euler / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό)
- Διατήρηση της ενέργειας – Εξίσωση Bernoulli / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό κατά μήκος γραμμής ροής

Καταστατικές εξισώσεις

Ετσι ονομάζουμε σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις, οι οποίες επιπλέον περιέχουν ιδιότητες του συγκεκριμένου ρευστού, και συγκεκριμένα την αντίσταση που προβάλλει το ρευστό στην κίνησή του.

Μάλιστα, για όλα τα νευτώνεια ρευστά, αυτά δηλαδή που έχουν ιξώδες που εξαρτάται κυρίως από την θερμοκρασία, η μορφή των καταστατικών εξισώσεων είναι η ίδια. Η μορφή αυτή, χαρακτηρίζεται από τις παρακάτω πολύ σημαντικές ιδιότητες:

- οι τάσεις είναι γραμμικές συναρτήσεις των παραμορφώσεων.
- Σε απουσία κίνησης ($e_{ij}=0$), οι διατμητικές τάσεις είναι μηδενικές, ενώ οι ορθές ίσες μεταξύ τους.
- Το ρευστό είναι ομοιογενές.
- Το ρευστό είναι ισότροπο.

Αυτές οι καταστατικές εξισώσεις είναι οι εξής:

Καταστατικές εξισώσεις ρευστού

Στις ορθές τάσεις, υπεισέρχεται και η πίεση. Επίσης υπεισέρχονται και οι παραμορφώσεις και στους τρείς άξονες με διαφορετική βαρύτητα

$$\tau_{11} = -p - \frac{2}{3}\mu(e_{11}+e_{22}+e_{33}) + 2\mu e_{11}$$

$$\tau_{22} = -p - \frac{2}{3}\mu(e_{11}+e_{22}+e_{33}) + 2\mu e_{22}$$

$$\tau_{33} = -p - \frac{2}{3}\mu(e_{11}+e_{22}+e_{33}) + 2\mu e_{33}$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = 2\mu e_{12} \qquad \tau_{13} = \tau_{31} = 2\mu e_{13} \qquad \tau_{23} = \tau_{32} = 2\mu e_{23}$$

Διατμητικές τάσεις: ιξώδες επί παραμόρφωση

p = η πίεση. Στην απουσία κίνησης, όλες οι ορθές τάσεις είναι ίσες με την υδροστατική πίεση.
μ = το ιξώδες, ή δυναμικό ιξώδες, που δείχνει το μέγεθος της αντίστασης του ρευστού στην παραμόρφωσή του, ή πιο απλά, το πόσο "παχύρρευστο" είναι.

Καταστατικές εξισώσεις: Navier – Stokes !!!!!

Για ένα ασυμπίεστο ρευστό, (ρ=ct), οι καταστατικές εξισώσεις γίνονται:

$$\tau_{11} = -p + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \qquad \tau_{22} = -p + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \qquad \tau_{33} = -p + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) \qquad \tau_{13} = \tau_{31} = \mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) \qquad \tau_{32} = \tau_{23} = \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)$$

Συνδυάζοντας την εξίσωση κίνησης ενός ρευστού με την καταστατική εξίσωσή του, προκύπτουν οι εξισώσεις Navier – Stokesγια ασυμπίεστο ρευστό:

$$\boxed{\begin{aligned}
\rho\frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \rho v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \rho v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3} &= \rho f_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right)\\
\rho\frac{\partial v_2}{\partial t} + \rho v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \rho v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \rho v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3} &= \rho f_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}\right)\\
\rho\frac{\partial v_3}{\partial t} + \rho v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \rho v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \rho v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= \rho f_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right)
\end{aligned}}$$

Εξισώσεις Navier - Stokes (ασυμπίεστο ρευστό)

οι οποίες μαζί με την εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστο ρευστό:

Καταστατικές εξισώσεις: Εξισώσεις Euler ή Gauss για τέλειο (ιδανικό) ρευστό

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

αποτελούν σύστημα 4 εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους (τις τρείς συνιστώσες της ταχύτητας και την πίεση).

Ισχύουν σε κάθε σημείο του χώρου στον οποίο κινείται το ρευστό και περιγράφουν τον τρόπο κίνησής του. Η ιδιαίτερη εξέλιξη μιας συγκεκριμένης κίνησης ρευστού, εξαρτάται από τον καθορισμένο χώρο στον οποίο γίνεται (πχ ένας σωλήνας), και από τις αρχικές τιμές (για x=0) των τεσσάρων συναρτήσεων. Τα όρια του χώρου αυτού αποτελούν τις λεγόμενες οριακές συνθήκες του συστήματος των εξισώσεων, και οι αρχικές τιμές αποτελούν τις αρχικές συνθήκες.

Για ένα τέλειο ρευστό, όπου ως τέτοιο ορίζεται το ιδεατό ρευστό που έχει μ=0, δηλαδή έχει μηδενική αντίσταση στην παραμόρφωσή του, οι εξισώσεις Navier – Stokes απλοποιούνται ως εξής:

$$\boxed{\begin{aligned}
\rho\frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \rho v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \rho v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3} &= \rho f_1 - \frac{\partial p}{\partial x_1}\\
\rho\frac{\partial v_2}{\partial t} + \rho v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \rho v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \rho v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3} &= \rho f_2 - \frac{\partial p}{\partial x_2}\\
\rho\frac{\partial v_3}{\partial t} + \rho v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \rho v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \rho v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= \rho f_3 - \frac{\partial p}{\partial x_3}
\end{aligned}}$$

Εξισώσεις Euler (τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό)

και ονομάζονται εξισώσεις του Euler.

Αντίστοιχα, οι καταστατικές εξισώσεις γίνονται:

Για τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό, οι ορθές τάσεις γίνονται ίσες με την πίεση ενώ οι διατμητικές ίσες με μηδέν

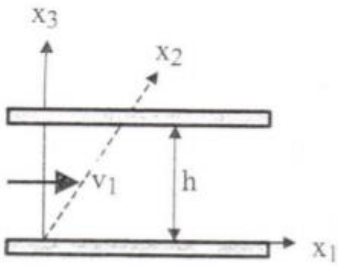
$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = -p \qquad \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{13} = \tau_{31} = \tau_{23} = \tau_{32} = 0$$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν διατμητικές τάσεις, ή αλλιώς, δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής.

Το μαθηματικό πρόβλημα της κίνησης ρευστού

Η μαθηματική διατύπωση του φυσικού προβλήματος της κίνησης ενός ρευστού, οδήγησε σε τρεις διαφορικές εξισώσεις, που τις ονομάζουμε εξισώσεις Navier - Stokes (3.52α) και που προέκυψαν από την εφαρμογή του νόμου του Νεύτωνα στο ρευστό. Οι τρεις αυτές εξισώσεις μαζί με την εξίσωση της συνέχειας (3.53) αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με άγνωστες συναρτήσεις τις συνιστώσες της ταχύτητας και την πίεση. Οι εξισώσεις αυτές ισχύουν για κάθε σημείο του χώρου στον οποίο κινείται το ρευστό και περιγράφουν τον τρόπο κίνησης του ρευστού. Αλλά σε κάθε φυσικό πρόβλημα, η κίνηση του ρευστού γίνεται σε ένα καθορισμένο χώρο (π.χ. κίνηση του ρευστού σε ένα σωλήνα), στα όρια του οποίου καθώς και στην αρχή του χρόνου οι συναρτήσεις v_1, v_2, v_3, p έχουν γενικά γνωστές τιμές. Είναι φανερό, ότι η γεωμετρία του χώρου καθώς και οι τιμές των v_1, v_2, v_3 και p στα όρια και στην αρχή του χρόνου ($t = 0$) θα καθορίσουν την ιδιαίτερη εξέλιξη μιας συγκεκριμένης κίνησης ρευστού, μια και για όλες τις περιπτώσεις ο τρόπος κίνησης περιγράφεται από τις ίδιες εξισώσεις. Από μαθηματική σκοπιά λοιπόν, το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων με τη βοήθεια οριακών συνθηκών που θα καθορίσουν το συγκεκριμένο φυσικό πρόβλημα για το οποίο γίνεται λόγος. **Οι συνθήκες αυτές, που δίνουν γενικά τις τιμές των v_1, v_2, v_3 και p στα όρια του χώρου, όπου κινείται το ρευστό καθώς και στην αρχή του χρόνου ονομάζονται αντίστοιχα οριακές και αρχικές συνθήκες.** Αν πετύχουμε να κάνουμε αυτή την επίλυση τότε για το συγκεκριμένο πρόβλημα θα ξέρουμε σε κάθε θέση και κάθε χρονική στιγμή τις τιμές των μεγεθών (ταχύτητα, πίεση, τάσεις) που είναι χρήσιμες για πρακτικούς σκοπούς.

Παράδειγμα: μόνιμη κίνηση ανάμεσα σε δύο πλάκες



Να μελετηθεί το πρόβλημα της μόνιμης κίνησης ενός ασυμπίεστου ρευστού ανάμεσα σε δύο οριζόντιες πλάκες απείρων διαστάσεων που απέχουν μεταξύ τους απόσταση h. Οι δυνάμεις του πεδίου βαρύτητας θεωρούνται αμελητέες και από τις συνιστώσες της ταχύτητας μόνο η v_1 είναι διάφορη του μηδενός.

Αρχικές συνθήκες: μη απαραίτητες, λόγω μόνιμης κίνησης
Οριακές συνθήκες: η ταχύτητα για $x_3 = 0$ και για $x_3 = h$, είναι 0

Λύση.

Ας δούμε πρώτα την απλουστευμένη μορφή που παίρνουν οι εξισώσεις Navier - Stokes καθώς και η εξίσωση της συνέχειας.

Μια και το φαινόμενο είναι μόνιμο, οι μερικές παράγωγοι ως προς το χρόνο θα είναι μηδενικοί.

Οι δυνάμεις που προκαλούν τη μεταβολή της ορμής στις εξισώσεις Navier - Stokes

$$\rho\frac{\partial v_1}{\partial t}+\rho v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\rho v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\rho v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}=\rho f_1-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right)$$

$$\rho\frac{\partial v_2}{\partial t}+\rho v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\rho v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\rho v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3}=\rho f_2-\frac{\partial p}{\partial x_2}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}\right)$$

$$\rho\frac{\partial v_3}{\partial t}+\rho v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\rho v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+\rho v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=\rho f_3-\frac{\partial p}{\partial x_3}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right)$$

Εξισώσεις Navier - Stokes (ασυμπίεστο ρευστό)

Μεταβολή της ορμής

πίεσης

Ιξώδους (διατμητικές, διάχυσης ορμής)

Βαρύτητας (εξωτερικές, θα μπορούσαν να υπάρχουν και ηλεκτρομαγνητικές)

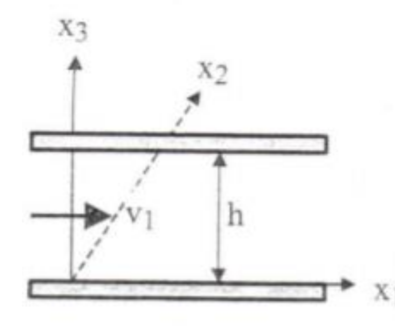
Απλοποίηση των εξισώσεων Navier – Stokes στην μόνιμη κίνηση ανάμεσα σε δύο πλάκες

$$\rho\frac{\partial v_1}{\partial t}+\rho v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\rho v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\rho v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}=\rho f_1-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right)$$

$$\rho\frac{\partial v_2}{\partial t}+\rho v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+\rho v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\rho v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3}=\rho f_2-\frac{\partial p}{\partial x_2}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}\right)$$

$$\rho\frac{\partial v_3}{\partial t}+\rho v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1}+\rho v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2}+\rho v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=\rho f_3-\frac{\partial p}{\partial x_3}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right)$$

Εξισώσεις Navier - Stokes (ασυμπίεστο ρευστό)



$$\cancel{\rho\frac{\partial v_1}{\partial t}}+\rho v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\cancel{\rho v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}}+\cancel{\rho v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3}}=\cancel{\rho f_1}-\frac{\partial p}{\partial x_1}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right)$$

$$\cancel{\rho\frac{\partial v_2}{\partial t}}+\cancel{\rho v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1}}+\cancel{\rho v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}}+\cancel{\rho v_3\frac{\partial v_2}{\partial x_3}}=\cancel{\rho f_2}-\frac{\partial p}{\partial x_2}+\cancel{\mu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}\right)}$$

$$\cancel{\rho\frac{\partial v_3}{\partial t}}+\cancel{\rho v_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1}}+\cancel{\rho v_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2}}+\cancel{\rho v_3\frac{\partial v_3}{\partial x_3}}=\cancel{\rho f_3}-\frac{\partial p}{\partial x_3}+\cancel{\mu\left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\right)}$$

Μηδενισμός λόγω σταθερής ροής

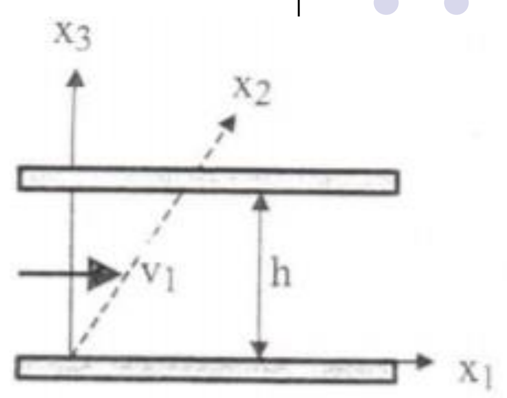
Μηδενισμός λόγω μηδενικών ταχυτήτων κατά x2 και x3

Μηδενισμός λόγω μη μεταβολής της V1 ως προς x2 και x3

Μηδενισμός λόγω αμελητέας βαρύτητας

Παράδειγμα: μόνιμη κίνηση ανάμεσα σε δύο πλάκες

οι εξισώσεις Navier - Stokes γράφονται :



$$\begin{cases} \rho . v_1 \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_1{}^2} + \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_2{}^2} + \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_3{}^2}\right), \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_3} = 0, \end{aligned}\right\} \end{cases}$$

Η πίεση δεν εξαρτάται από τα x_2 και x_3 δηλαδή μεταβάλλεται μόνο κατά τη διεύθυνση της ροής.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0.$$

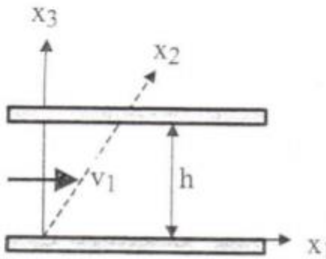
Εξίσωση της συνέχειας

Μόνιμο φαινόμενο: δεν έχουν νόημα οι αρχικές συνθήκες

Οριακές συνθήκες: $v_1(x_1, x_2, 0) = v_1(x_1, x_2, h) = 0$

(διότι οι πλάκες βρίσκονται σε $x_3=0$ και $x_3=h$)

Παράδειγμα: μόνιμη κίνηση ανάμεσα σε δύο πλάκες



$$\rho . v_1 \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right),$$

(λόγω της (5))

$$\frac{\partial p(x_1)}{\partial x_1} = \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right). \quad (7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0,$$

Η πίεση δεν εξαρτάται από τα x_2 και x_3 δηλαδή μεταβάλλεται μόνο κατά τη διεύθυνση της ροής.

$p=p(x_1)$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0.$$

$$v_1(x_1, x_2, 0) = v_1(x_1, x_2, h) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0 \quad (6)$$

(Επειδή η ταχύτητα v_1 δεν μεταβάλλεται ως προς x_2)

Επομένως, οι σχέσεις (7) και (5) γίνονται:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial p(x_1)}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 v_1(x_3)}{\partial x_3^2}, \quad (8) \\ &v_1(0) = v_1(h) = 0 . \end{aligned} \right.$$

Από την (8), επειδή $p=p(x_1)$ και $v_1=v_1(x_3)$, προκύπτει ότι και οι δύο όροι της σχέσης θα είναι ίσοι με μία σταθερά c

Παράδειγμα: μόνιμη κίνηση ανάμεσα σε δύο πλάκες

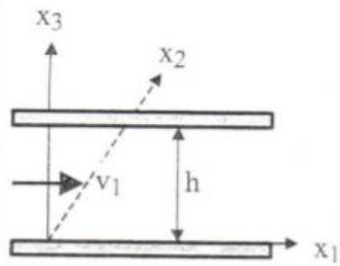
Δηλαδή

$$\frac{\partial p(x_1)}{\partial x_1} = \mu \frac{\partial^2 v_1(x_3)}{\partial {x_3}^2} = c$$

Διότι η πίεση είναι συνάρτηση του x1 και η ταχύτητα του x3

επομένως

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial {x_3}^2} = \frac{c}{\mu}$$



και ολοκληρώνοντας δύο φορές

$$v_1 = \frac{1}{2}\frac{c}{\mu}{x_3}^2 + c_1.x_3 + c_2 \qquad \text{(A10)}$$

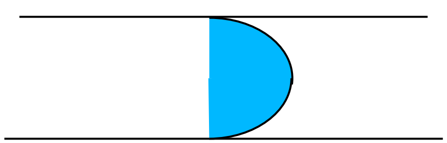
Χρησιμοποιώντας τώρα τις οριακές συνθήκες (A8) βρίσκουμε ότι :

$$c_2 = 0 \qquad \text{και} \qquad c_1 = -\frac{1}{2}\frac{c}{\mu}h\ . \qquad \text{(A11)}$$

Έχουμε λοιπόν τελικά ότι :

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{2}\frac{c}{\mu}x_3(x_3 - h).} \qquad \text{(A12)}$$

Παραβολικό προφίλ ταχύτητας
Όπως και σε κλειστό αγωγό
Κυλινδρικής διατομής



Βλέπουμε δηλαδή ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται παραβολικά και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στη θέση $x_3 = h/2$. Η μέγιστη τιμή της είναι

$$v_{1_{max}} = \frac{1}{8}\frac{c.h^2}{\mu}. \qquad \text{(A13)}$$

Επομένως στη συνέχεια θα δούμε:

- Διατήρηση της μάζας – εξίσωση της συνέχειας
- Κινηματική (επιτάχυνση ανά άξονα)
- Παραμορφώσεις και τανυστής παραμορφώσεων
- Τάσεις και τανυστής τάσεων
- Εξισώσεις κίνησης (τάσεις, ταχύτητες, πυκνότητα)
- Καταστατικές εξισώσεις (τάσεις – παραμορφώσεις – εξισώσεις Navier-Stokes / ασυμπίεστο ρευστό – Εξισώσεις Euler / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό)
- Διατήρηση της ενέργειας – Εξίσωση Bernoulli / τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό κατά μήκος γραμμής ροής

Διατήρηση της ενέργειας – Εξίσωση Bernoulli

Οπως προαναφέρθηκε, η έννοια του τέλειου ρευστού, ενός ρευστού που η ροή του συμβαίνει χωρίς θερμικές απώλειες ενέργειας λόγω τριβών, είναι πολύ σημαντική. Αυτό συμβαίνει, γιατί έτσι μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας κατά την κίνησή του. Τις απώλειες ενέργειας που συμβαίνουν στα πραγματικά ρευστά, τις υπολογίζουμε με εμπειρικές σχέσεις, ώστε να έχουμε ολοκληρωμένη εικόνα για τις ροές ενός πραγματικού ρευστού.

Για τη μαθηματική έκφραση της μηχανικής ενέργειας ενός τέλειου ρευστού (μ=0), είδαμε το πώς οι εξισώσεις Navier – Stokes τροποποιούνται στις εξισώσεις Euler. Στην περίπτωση αστρόβιλου πεδίου ροής, δηλαδή ροής χωρίς στροβιλισμούς, χωρίς περιστροφικές κινήσεις, η οποία επιπλέον είναι και μόνιμη, δηλαδή όλα τα φυσικά μεγέθη της είναι ανεξάρτητα του χρόνου, μπορούμε να θεωρήσουμε ροή τέλειου ρευστού με πεδίο ταχυτήτων:

Διατήρηση της ενέργειας – Εξίσωση Bernoulli

$$v_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, v_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, v_3 = \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$$

Σ' αυτή την περίπτωση, οι εξισώσεις Euler τροποποιούνται στις:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{|v|^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}\right) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{|v|^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}\right) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{|v|^2}{2g} + x_3 + \frac{p}{\rho g}\right) = 0$$

υπό την προϋπόθεση ότι x_3 είναι ο κατακόρυφος άξονας και x_1, x_2 οι οριζόντιοι.

Η τρίτη από τις εξισώσεις αυτές δίνει ότι:

$$\boxed{\frac{|v|^2}{2g} + x_3 + \frac{p}{\rho g} = ct}$$

Τέλειο και ασυμπίεστο ρευστό, κατά μήκος μιάς ροϊκής γραμμής

η οποία ονομάζεται εξίσωση του Bernoulli, και εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας στη ροή ενός τέλειου ρευστού. Οι τρεις όροι της εξίσωσης Bernoulli, ονομάζονται αντίστοιχα φορτίο ταχύτητας, φορτίο θέσης και φορτίο πίεσης, και έχουν διαστάσεις μήκους. Ο πρώτος εκφράζει την κινητική ενέργεια, ο δεύτερος τη δυναμική, και ο τρίτος την ενέργεια που αντιστοιχεί στην πίεση του ρευστού. Το άθροισμα του δεύτερου και του τρίτου όρου ονομάζεται "πιεζομετρικό ύψος" ή "πιεζομετρικό φορτίο", ενώ αυτό και των τριών, "ολικό φορτίο".

Η εξίσωση Bernoulli εκφράζει το γεγονός ότι: για μόνιμη και αστρόβιλη ροή ενός τέλειου και ασυμπίεστου ρευστού, το ολικό φορτίο είναι σταθερό κατά μήκος μιας γραμμής ροής. Η συγκεκριμένη εξίσωση είναι χρησιμότατη σε τεράστιο πεδίο προβλημάτων υδραυλικής.