ΘΕΜΑ 1º

α) Οι δυνάμεις που δρούν στο σώμα, είναι η άνωση και το βάρος του. Την συνισταμένη αυτών των δύο δυνάμεων αντισταθμίζει η δύναμη που ασκείται ώστε να ακινητεί το σώμα. Αν θεωρήσουμε θετικές τις δυνάμεις προς τα κάτω, τότε η συνισταμένη βάρους και άνωσης θα είναι:

$$W - A = \rho g V - \rho_\theta g V = (\rho - \rho_\theta) g V = \left(\frac{AM}{2} - 1020\right) \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}12\ N$$

AM	δύναμη W−A
4000	1153,7 N
5000	1742,3 N
6000	2330,9 N

Στο πινακάκι φαίνεται το μέτρο της συνισταμένης βάρους και άνωσης για τρείς διαφορετικούς AM. Η φορά της συνισταμένης, αφού το πρόσημο είναι θετικό, είναι προς τα κάτω. Άρα η δύναμη που ζητείται, αυτή που ασκείται ώστε να ακινητεί το σώμα, έχει φορά προς τα επάνω (και ίδιο μέτρο) ανάλογα με το AM.

β) Για να μην υπάρχει ανάγκη εξωτερικής δύναμης, πρέπει η συνισταμένη βάρους και άνωσης να είναι Ø. Δηλαδή:

$$W - A = \emptyset \Rightarrow (\rho - \rho_\theta) \cdot g \cdot V = \emptyset \Rightarrow \rho - \rho_\theta = \emptyset \Rightarrow \rho = \rho_\theta$$

Δηλαδή, το σώμα πρέπει να έχει πυκνότητα ακριβώς ίση με της θάλασσας $\boxed{\rho = \rho_\theta = 1020\ kg/m^3}$, ανεξάρτητα με τον όγκο του.

Προσοχή: Αυτό ισχύει για περιπτώσεις όπως εδώ, που το σώμα είναι πλήρως βυθισμένο.

ΘΕΜΑ 2º

α) Πρόκειται για γραμμικές απώλειες, που δίνονται από τον τύπο Darcy-Weisbach:

$$\Delta h = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}$$ Είναι: $D = 0.125m$, $v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}01}{\pi \cdot 0{,}125^2} = 0{,}815\ m/s$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0.001}{1000} = 10^{-6}\ \frac{m^2}{s}, \quad Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{0{,}815 \cdot 0{,}125}{10^{-6}} = 1{,}02 \cdot 10^5 = 102000$$

Επειδή ο αγωγός είναι λείος, είναι $e/D \simeq \emptyset$, δηλαδή στο διάγραμμα Moody παίρνουμε την γραμμή των λείων αγωγών (τελευταία γραμμή).

Για $Re = 102000$, βρίσκω $f = 0{,}018$, και επομένως:

$$\Delta h = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}018 \cdot \frac{(AM/20)}{0{,}125} \cdot \frac{0{,}815^2}{2 \cdot 9{,}81} = 4{,}875 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{AM}{20}\right) m.$$

Έτσι, για $AM = 4000$, είναι $\boxed{\Delta h = 0{,}975\,m}$

β) Με πενταπλασιασμό της παροχής, θα έχουμε: $Q_2 = 0{,}05\,m^3/s$, $v_2 = 4{,}074\,m/s$

$Re_2 = 5{,}1 \cdot 10^5 = 510000$, και $f_2 = 0{,}013$.

Άρα, με γνωστές απώλειες, που είναι $0{,}975\,m$ γιά $AM = 4000$, ή $4{,}875 \cdot 10^{-3} \left(\frac{AM}{20}\right) m$ στη γενική περίπτωση, πρέπει να βρούμε το καινούργιο μήκος L_2:

$$\Delta h = f_2 \cdot \frac{L_2}{D} \cdot \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow L_2 = \frac{2g\,D \cdot \Delta h}{f_2 \cdot v_2^2} = \frac{9{,}81 \cdot 2 \cdot 0{,}125 \cdot \Delta h}{0{,}013 \cdot (4{,}074)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_2 = 11{,}366 \cdot \Delta h = 2{,}7706 \cdot 10^{-3}\,AM\; m$$

Στον παρακάτω πίνακα, φαίνονται οι τιμές των απωλειών (α) και του μήκους (β), για διάφορους AM:

AM	απάντηση στο (α), Δh (m)	απάντηση στο (β), L σε (m)
3000	0,731	8,311
4000	0,975	11,082
5000	1,219	13,853
6000	1,463	16,623

Θέμα 3ο:

α) Αφού μετατρέψουμε την παροχή σε μονάδες S.I., δηλαδή m^3/s, υπολογίζουμε την ταχύτητα στους αγωγούς, τον αριθμό Re, τον συντελεστή απωλειών f, από τις γνωστές σχέσεις: (γιά $AM = 4000$):

$$Q = 40\,m^3/hr = \frac{40}{3600} = 0{,}0111\,m^3/s, \quad v = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}0111}{\pi \cdot (0{,}1)^2} = 1{,}415\,m/s$$

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu} = \frac{1{,}415 \cdot 0{,}1}{10^{-6}} = 141500 \quad \text{και} \quad \frac{e}{D} = \frac{0{,}0001\,m}{0{,}1\,m} = 0{,}001$$

οπότε $f = 0{,}0216$

Οι απώλειες, γραμμικές και τοπικές, είναι:

$$\Sigma \Delta h = f \frac{L}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} + (K_{εισ} + K_{εξ}) \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(f \frac{L}{D} + K_{εισ} + K_{εξ}\right)$$

Είναι $K_{εισ} = 0{,}5$ και $K_{εξ} = 1$, άρα

$$\Sigma \Delta h = \frac{1{,}415^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \left(0{,}0216 \cdot \frac{200}{0{,}1} + 0{,}5 + 1\right) = \boxed{4{,}56\,m}$$

β) Θεωρώντας την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των ελεύθερων επιφανειών Α και Β:

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A + h_{man} = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B + \Sigma \Delta h$$

όπου h_{man} είναι το μανομετρικό ύψος της αντλίας. Είναι $p_A = p_B = v_A = v_B = 0$

οπότε:

$$h_{man} = z_B - z_A + \Sigma \Delta h = 9{,}56\,m$$

και η ισχύς της αντλίας: $P = \gamma Q h = 9810 \cdot 0{,}0111 \cdot 9{,}56 = \boxed{1042\,W}$

~~Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται~~ οι απαντήσεις για διάφορους AM:

AM	απάντηση στο (α) ΣΔh (m)	απάντηση στο (β), P (W)
3500	3,52	812
4000	4,56	1042
4500	5,72	1314
5000	7,03	1639
5500	8,47	2018
6000	10,03	2457
6500	11,72	2961